

# **CARATERIZAÇÃO EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ESTRUTURAS**

Aplicação na Ponte sobre o rio Douro da A41

**FRANCISCO CARVALHO NETO DE QUEIRÓS PIMENTA**

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de  
**MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL — ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS**

---

Orientador: Professor Doutor Filipe Manuel Rodrigues Leite  
Magalhães

---

Coorientador: Professor Doutor Álvaro Alberto de Matos Ferreira da  
Cunha

JUNHO DE 2014

## **MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA CIVIL 2013/2014**

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Tel. +351-22-508 1901

Fax +351-22-508 1446



[miec@fe.up.pt](mailto:miec@fe.up.pt)

*Editado por*

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua Dr. Roberto Frias

4200-465 PORTO

Portugal

Tel. +351-22-508 1400

Fax +351-22-508 1440



[feup@fe.up.pt](mailto:feup@fe.up.pt)



<http://www.fe.up.pt>

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição que seja mencionado o Autor e feita referência a *Mestrado Integrado em Engenharia Civil - 2013/2014 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2014.*

As opiniões e informações incluídas neste documento representam unicamente o ponto de vista do respetivo Autor, não podendo o Editor aceitar qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam existir.

Este documento foi produzido a partir de versão eletrónica fornecida pelo respetivo Autor.

Aos meus pais e irmãos

*“An expert is a person who has found out by his own painful experience all the mistakes that one can make in a very narrow field”*

*Niels Bohr*



## **AGRADECIMENTOS**

A todos aqueles que me acompanharam durante estes cinco anos, aos professores que tornaram este trabalho possível, e aos amigos que permitiram que este período fosse muito mais do que isso. De uma forma especial:

- Ao Professor Filipe Magalhães, por toda a disponibilidade, conhecimento, tempo e dedicação entregues a este trabalho e pela revisão cuidada do mesmo;
- Ao Professor Álvaro Cunha, diretor do ViBest, pela disponibilização dos resultados dos ensaios de vibração ambiental realizados sobre a ponte sobre o Rio Douro da A41;
- Ao João Pedro e à Dânia, que mesmo longe estão sempre presentes, por me terem acompanhado durante grande parte do meu percurso académico;
- À João e à Catarina, por toda a companhia, ajuda e, sobretudo, amizade fundamentais para suportar os momentos de maior trabalho durante a especialização em Estruturas e tornar os restantes tão especiais;
- À Patrícia e à Raquel, por toda a companhia e ajuda, sem os quais a escrita deste trabalho teria sido muito mais morosa, e por toda a amizade e boa-disposição, que permitiram que este semestre fosse muito mais do que isso;
- Ao João Pedro, ao Miguel, à Ágata e à Ana, pelo tanto que foi tudo o resto ao longo destes 5 anos



## **RESUMO**

Neste trabalho procurou-se compreender, apresentar e explorar os princípios fundamentais associados à identificação estocástica do comportamento dinâmico de estruturas a partir de dados obtidos através de ensaios de vibração ambiental e à sua utilização para ajuste de modelos numéricos.

Nesse sentido, apresentam-se conceitos teóricos, bem como os métodos nestes baseados, que permitem a correta caraterização dinâmica de uma estrutura quando a excitação atuante é conhecida à partida ou caraterizada apenas em termos probabilísticos, tendo-se criado também várias rotinas em MATLAB que permitem uma correta aplicação do método da seleção de picos, da decomposição no domínio da frequência e da identificação estocástica em sub-espacos a partir das correlações. Todo este processo é devidamente acompanhado e ilustrado por um exemplo simples a que se aplicaram as rotinas criadas, validando-as, para o qual se simulou a resposta através do MATLAB recorrendo a formulações de estado discretas no tempo.

De seguida, e passando para uma estrutura efetivamente ensaiada e para a qual de obteve também informação importante relativa ao modelo utilizado no projeto, utilizaram-se os procedimentos previamente apresentados para estimar os parâmetros modais da ponte sobre o Rio Douro da A41. Os resultados que podem ser mais facilmente retirados deste tipo de ensaios (frequências naturais e configurações modais) obtidos pelos diferentes métodos foram de seguida comparados entre si, tendo-se estes revelado bastante consistentes.

Por fim, e recorrendo aos resultados obtidos experimentalmente para a obra-de-arte em estudo, efetuou-se o ajuste de um modelo simplificado criado num programa de cálculo automático, tendo-se procurado identificar e corrigir as fontes de incerteza resultantes das simplificações consideradas.

**PALAVRAS-CHAVE:** identificação modal estocástica, pontes, ensaios dinâmicos, ajuste de modelos numéricos, ensaios de vibração ambiental





## ABSTRACT

This study was aimed at understanding, presenting and exploring the fundamental principles regarding structural stochastic modal identification from data obtained during ambient vibration tests and its use to update numerical models.

The theoretical background, as well as the identification procedures based on these, that allow an accurate characterization of the structure dynamics when the active excitation is known *a priori* or only characterized in probabilistic terms are presented, as well as several MATLAB routines that allow a correct application of the Peak Picking, Frequency Domain Decomposition and Covariance-driven Stochastic Subspace Identification methods. All this process is duly supported by a simple example of application, whose time response to a random action was simulated with MATLAB using discrete time state space formulations, to which the created routines were applied and therefore validated.

Furthermore, and regarding a real structure that was actually tested and for which it was also obtained important information on the design model, the methods previously presented were applied to estimate the modal parameters of the bridge on A41 over Rio Douro. The results that can be more easily drawn from this type of tests (natural frequencies and mode shapes) obtained by the different methods were then compared with each other, being the results very consistent.

Finally, and using the results obtained experimentally for the bridge under study, an updating of a simplified model based on the project information and created on automatic calculation program was performed, having sought to identify and correct the source of errors resulting from the considered simplifications.

**KEYWORDS:** stochastic modal identification, bridges, dynamic tests, numerical models updating, ambient vibration tests



## ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS .....	i
RESUMO .....	iii
ABSTRACT .....	v

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1. MOTIVAÇÃO .....	1
1.2. OBJETIVOS DO TRABALHO .....	1
1.3. ORGANIZAÇÃO DA TESE .....	2
<b>2. MODELOS DINÂMICOS DE SISTEMAS LINEARES .....</b>	<b>5</b>
2.1. INTRODUÇÃO .....	5
2.2. EXCITAÇÃO DETERMINÍSTICA .....	7
2.2.1. FORMULAÇÃO CLÁSSICA .....	7
2.2.1.1. Sistema de um grau de liberdade .....	7
2.2.1.2 Sistemas de múltiplos graus de liberdade .....	9
2.2.2. FORMULAÇÃO DE ESTADO .....	18
2.2.2.1. Modelos Contínuos .....	18
2.2.2.2. Modelos Discretos .....	21
2.3. EXCITAÇÃO ESTOCÁSTICA .....	23
<b>3. MÉTODOS ESTOCÁSTICOS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL .....</b>	<b>29</b>
3.1. INTRODUÇÃO .....	29
3.2. ESTIMATIVA DAS FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO E ESPETROS DA RESPOSTA .....	31
3.2.1. ESPETROS DE RESPOSTA .....	31
3.2.2. FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO .....	34
3.3. MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL .....	37
3.3.1. MÉTODO DA SELEÇÃO DE PICOS – “PEAK-PICKING” (PP) .....	37
3.3.2. MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA – FREQUENCY DOMAIN DECOMPOSITION .....	46
3.3.3. MÉTODO DA IDENTIFICAÇÃO ESTOCÁSTICA EM SUB-ESPAÇOS A PARTIR DAS CORRELAÇÕES .....	55
3.3.4. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	65

<b>4. APLICAÇÃO À PONTE SOBRE O RIO DOURO (A41)</b>	67
4.1. INTRODUÇÃO	67
4.2. MODELO NUMÉRICO	67
4.3. ENSAIO DE VIBRAÇÃO AMBIENTAL	70
4.3.1. MÉTODO DA SELEÇÃO DE PICOS (“PEAK-PICKING”)	72
4.3.2. MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA (VERSÃO MELHORADA)	80
4.3.3. MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO ESTOCÁSTICA A PARTIR DE SUB-ESPAÇOS (SSI-COV)	87
4.4. ANÁLISE DE RESULTADOS	98
<b>5. AJUSTE DO MODELO NUMÉRICO</b>	101
5.1. IDENTIFICAÇÃO DAS VARIÁVEIS A CONSIDERAR	101
5.2. ESTUDO DE SENSIBILIDADE	103
5.3. AJUSTE DO MODELO NUMÉRICO	105
5.3.1. AJUSTE DO TABULEIRO DE JUSANTE	107
5.3.2. AJUSTE DO TABULEIRO DE MONTANTE	115
5.4. RESULTADOS FINAIS E CONCLUSÕES	117
<b>6. CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS</b>	119
6.1. CONCLUSÕES	119
6.2. DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	121
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 – Secção do caso de estudo.....	5
Figura 2.2 – Vista longitudinal e em perspetiva do modelo criado .....	6
Figura 2.3 – Funções de resposta em frequência (adaptado de (Magalhães, 2004)).....	8
Figura 2.4 – Deformação para um assentamento de apoio (apresentado em mm) unitário no primeiro grau de liberdade (graus de liberdade numerados de 1 a 9 da esquerda para a direita).....	11
Figura 2.5 – Esboço dos modos identificados em alçado (o modo a azul corresponde à menor frequência representada e o modo a verde à maior).....	13
Figura 2.6 – FRF no espaço modal do modelo de base (modelo 1).....	16
Figura 2.7 – FRF no espaço modal para o modelo alternativo (modelo 2) .....	16
Figura 2.8 – Amplitude das funções da 1ª coluna da matriz das FRF – modelo 1 .....	17
Figura 2.9 – Retrato de fase das funções da 1ª coluna da matriz das FRF – modelo 1 .....	17
Figura 2.10 – Influência da irregularidade do processo nos espectros de potência e funções de auto-correlação .....	24
Figura 2.11 – Matriz dos espectros de resposta (em acelerações) S11 .....	26
Figura 3.1 – Ação atuante sobre o 5º grau de liberdade (meio do vão central) .....	30
Figura 3.2 – Resposta simulada nos graus de liberdade 1, 2 e 5 (de cima para baixo).....	30
Figura 3.3 – Exemplo da aplicação de janelas de Hanning a um sinal amostrado .....	32
Figura 3.4 – Diferentes estimativas e respetiva sobreposição com o resultado teórico.....	34
Figura 3.5 – Função de correlação (sem e com adição de zeros à série temporal) (adaptado de (Bendat and Piersol, 2000)) .....	36
Figura 3.6 – Auto-espectros associados ao 1º (esquerda) e 5º (direita) graus de liberdade .....	38
Figura 3.7 – Efeitos da normalização no cálculo do espectro médio .....	38
Figura 3.8 – ANPSD para o modelo 2.....	39
Figura 3.9 – Funções de transferência para os graus de liberdade 2 e 3 (amplitude e fase) .....	41
Figura 3.10 – Esboço dos 3 primeiros modos obtidos pelo método PP (em alçado).....	43
Figura 3.11 – Aproximação do espectro de resposta para o 4º (à esquerda) e 7º (à direita) picos identificados.....	44
Figura 3.12 – Funções de coerência avaliadas para o 2º e 3º grau de liberdade .....	45
Figura 3.13 – Valores singulares obtidos para os vários “setups” .....	48
Figura 3.14 – Valores singulares obtidos sem (esquerda) e com (direita) normalização dos espectros.....	49
Figura 3.15 – Valores singulares – modelo 1 (apenas se legendou os valores mais relevantes).....	49
Figura 3.16 – Variação dos valores singulares para o método EFDD.....	52
Figura 3.17 – Variação do MAC em relação às diferentes frequências ressonantes (em cima) e respetiva seleção dos espectros (em baixo) .....	53
Figura 3.18 – Funções de auto-correlação 2 (à esquerda) e 4 (à direita) .....	53
Figura 3.19 – Gráficos para estimativa do amortecimento .....	54
Figura 3.20 – Gráficos para a estimativa das frequências.....	54

Figura 3.21 – Variação dos valores singulares da matriz de Toeplitz.....	57
Figura 3.22 – Diagramas de estabilização .....	58
Figura 3.23 – Diagrama de estabilização após tratamento.....	58
Figura 3.24 – Variação do amortecimento em função da frequência .....	59
Figura 3.25 – Esquema de funcionamento do método “Post Global Estimation Re-scaling Approach” (adaptado de (Parloo, 2003)) .....	62
Figura 4.1 – Alçado da ponte sobre o Rio Douro .....	67
Figura 4.2 – Secção utilizada a meio vão e sobre os encontros.....	68
Figura 4.3 – Vista em perspetiva do modelo utilizado.....	68
Figura 4.4 – Pormenor da inserção do tabuleiro num dos pilares .....	68
Figura 4.5 – Esboço dos principais modos transversais (vista em planta) .....	69
Figura 4.6 – Esboço dos principais modos verticais (vista em alçado).....	70
Figura 4.7 – Localização dos pontos de medição ao longo dos vãos.....	71
Figura 4.8 – Acelerações registadas na 5ª estação de medição no 3º “setup”.....	71
Figura 4.9 – Espectros médios normalizados para acelerações transversais e verticais .....	72
Figura 4.10 – ANPSD das acelerações longitudinais nos dois tabuleiros .....	73
Figura 4.11 - ANPSD das acelerações transversais nos dois tabuleiros.....	74
Figura 4.12 – Avaliação da fase de cada ponto para o 3º modo identificado ( $f=0.855$ Hz) .....	75
Figura 4.13 – Esboço (em planta) dos modos transversais identificados experimentalmente .....	75
Figura 4.14 – ANPSD das acelerações verticais nos dois tabuleiros .....	76
Figura 4.15 – Esboço (em alçado) dos modos verticais identificados experimentalmente .....	77
Figura 4.16 – Avaliação da variação dos valores dos espectros ao longo dos “setups” .....	78
Figura 4.17 – Valores singulares das acelerações dos tabuleiros avaliadas em conjunto.....	80
Figura 4.18 – Esboço de dois modos com frequências próximas (em planta a verde e em alçado a azul) .....	81
Figura 4.19 – Valores singulares associados unicamente às acelerações transversais de cada tabuleiro .....	81
Figura 4.20 – Valores singulares selecionados para o 2º modo de vibração transversal.....	82
Figura 4.21 – Função de auto-correlação normalizada para 2ª frequência transversal no 2º “setup” ..	82
Figura 4.22 – Valores singulares selecionados para diferentes limites mínimos do MAC (2º “setup” à esquerda e 3º “setup” à direita) .....	83
Figura 4.23 – Funções de auto-correlação e correspondente exponencial ajustada (2º “setup” à esquerda e 3º “setup” à direita) .....	83
Figura 4.24 – Esboço dos 2 primeiros modos de vibração transversais identificados pelo EFDD.....	85
Figura 4.25 – Valores singulares associados unicamente às acelerações verticais de cada tabuleiro	86
Figura 4.26 – Esboço dos 2 primeiros modos de vibração vertical identificados pelo EFDD.....	87
Figura 4.27 – Variação dos valores singulares em função da ordem do modelo .....	88
Figura 4.28 – Diagramas de estabilização obtidos para as diferentes hipóteses testadas .....	89
Figura 4.29 – Diagrama de estabilização – vista geral (à esquerda) e pormenor (à direita) .....	90

Figura 4.30 – Esboço dos modos com frequências próximas identificados (em planta a verde e em alçado a azul) .....	90
Figura 4.31 – Diagrama de estabilização para os modos transversais .....	91
Figura 4.32 – Esboço dos 2 primeiros modos de vibração transversal identificados pelo SSI-Cov.....	92
Figura 4.33 – Variação do amortecimento ao longo dos vários “setups” (tabuleiro de jusante) .....	93
Figura 4.34 – Variação do amortecimento médio ao longo dos “setups” (tabuleiro de jusante) .....	93
Figura 4.35 – Variação do amortecimento ao longo dos vários “setups” (tabuleiro de montante) .....	94
Figura 4.36 – Variação do amortecimento médio ao longo dos “setups” (tabuleiro de montante).....	94
Figura 4.37 – Diagramas de estabilização para os modos verticais.....	95
Figura 4.38 – Esboço dos 2 primeiros modos de vibração vertical identificados pelo SSI-Cov .....	96
Figura 4.39 – Variação do amortecimento médio ao longo dos “setups” (modos verticais).....	97
Figura 5.1 – Esquema de ajuste de um modelo .....	102
Figura 5.2 – Variação da 1ª frequência transversal em função das rigidezes dos pilares P1 e P3 ...	104
Figura 5.3 – Comparação gráfica das frequências numéricas e experimentais transversais .....	107
Figura 5.4 – Comparação gráfica das frequências numéricas e experimentais transversais após ajuste .....	110
Figura 5.5 – Comparação gráfica entre frequências numéricas e experimentais verticais (rotação e deslocamento livre) .....	110
Figura 5.6 – Comparação final gráfica entre frequências numéricas e experimentais.....	118





## ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 2.1 – Caraterização da secção .....	6
Quadro 2.2 – Reações obtidas para um assentamento unitário no primeiro grau de liberdade .....	12
Quadro 2.3 – Frequências e amortecimentos modais – modelo 1 .....	14
Quadro 2.4 – Frequências e amortecimentos modais do modelo alternativo – modelo 2.....	14
Quadro 2.5 – Grandezas estatísticas associadas a processos estocásticos .....	23
Quadro 3.1 – Valores caraterísticos para as diferentes estimativas efetuadas.....	33
Quadro 3.2 – Comparação entre os resultados teóricos e obtidos do ANPSD .....	39
Quadro 3.3 – Amplitude normalizada da função de transferência avaliada nas diferentes frequências .....	41
Quadro 3.4 – Fase da função de transferência avaliada nas diferentes frequências.....	42
Quadro 3.5 – Modos obtidos cruzando a informação da amplitude e fase .....	42
Quadro 3.6 – MAC de cada modo obtido em relação ao modo teórico respetivo .....	43
Quadro 3.7 – Valores obtidos para os amortecimentos modais .....	44
Quadro 3.8 – Valores obtidos para as várias funções de coerência avaliadas nas frequências ressonantes.....	45
Quadro 3.9 – Comparação entre os resultados teóricos e os obtidos pelo FDD .....	50
Quadro 3.10 – Modos obtidos por aplicação do método FDD .....	50
Quadro 3.11 – Comparação entre os amortecimentos teóricos e os obtidos pelo EFDD .....	54
Quadro 3.12 – Comparação entre as frequências teóricas e as obtidas pelo EFDD .....	55
Quadro 3.13 – Frequências identificadas pelo método SSI-COV.....	59
Quadro 3.14 – Média e coeficiente de variação associados ao amortecimento para séries com duração de 10 minutos .....	60
Quadro 3.15 – Média e coeficiente de variação associados ao amortecimento para séries com duração de 2 minutos .....	61
Quadro 3.16 – Caraterísticas dos diversos “setups” utilizados.....	63
Quadro 3.17 – Modos finais obtidos após escalonamento e aglutinação dos vários “setups” .....	65
Quadro 4.1 – Restantes cargas permanentes consideradas.....	69
Quadro 4.2 – Posicionamento das várias estações nos diferentes “setups” .....	71
Quadro 4.3 – Principais frequências identificadas .....	79
Quadro 4.4 – Amortecimentos obtidos para os 4 primeiros modos de vibração em função do MAC ..	84
Quadro 4.5 – Amortecimentos obtidos para todos os modos transversais identificados .....	84
Quadro 4.6 – MAC entre os modos transversais identificados pelo EFDD e pelo “Peak Picking” .....	85
Quadro 4.7 – Amortecimentos obtidos para os modos verticais identificados .....	86
Quadro 4.8 – MAC entre os modos verticais identificados pelo EFDD e pelo “Peak Picking” .....	87
Quadro 4.9 – Caraterização das diferentes hipóteses testadas .....	88
Quadro 4.10 – Frequências e amortecimentos dos modos transversais identificados .....	91

Quadro 4.11 – MAC entre os modos transversais identificados pelo SSI-Cov e o “Peak Picking” (tabuleiro de jusante) .....	92
Quadro 4.12 – Desvio padrão das séries amostradas ao longo dos vários “setups” .....	93
Quadro 4.13 – Hipóteses analisadas .....	95
Quadro 4.14 – Frequências e amortecimentos dos modos verticais identificados .....	96
Quadro 4.15 – MAC entre os modos verticais identificados pelo SSI-Cov e o “Peak Picking” .....	97
Quadro 4.16. – Comparação de resultados (frequências) .....	99
Quadro 4.17. – Comparação de resultados (amortecimento (%)) .....	100
Quadro 5.1 – Efeito da alteração do módulo de elasticidade nas frequências da estrutura.....	103
Quadro 5.2 – Avaliação da influência de cada pilar nos modos de vibração.....	104
Quadro 5.3 – Alterações introduzidas pela variação da rigidez da base dos pilares P2 e P3.....	106
Quadro 5.4 – Comparação entre frequências numéricas e experimentais transversais .....	107
Quadro 5.5. – Rigidez adotadas na base de cada pilar (1ª iteração) .....	108
Quadro 5.6 – Frequências obtidas para os modos transversais (1ª iteração) .....	108
Quadro 5.7 – Rigidezes adotadas na base de cada pilar (2ª iteração).....	109
Quadro 5.8 – Frequências obtidas para os modos transversais (2ª iteração) .....	109
Quadro 5.9 – Comparação entre frequências numéricas e experimentais verticais (rotação e deslocamento livre).....	111
Quadro 5.10 - Comparação entre frequências numéricas e experimentais verticais (ligações monolíticas) .....	112
Quadro 5.11 – Frequências obtidas para os modos verticais bloqueando apenas rotações ou translações .....	112
Quadro 5.12 – Frequências obtidas para os modos verticais bloqueando rotações nos pilares ou nos encontros .....	113
Quadro 5.13 – Frequências verticais obtidas (1ª iteração) .....	113
Quadro 5.14 – Frequências verticais obtidas (2ª iteração) .....	114
Quadro 5.15 – Comparação de resultados para a 1ª iteração.....	114
Quadro 5.16 – Comparação de resultados para a 2ª iteração.....	115
Quadro 5.17 – Comparação entre frequências experimentais e numéricas transversais (montante) .....	116
Quadro 5.18 – Comparação entre frequências numéricas e experimentais verticais (montante).....	116
Quadro 5.19 – Comparação final entre modos numéricos e experimentais do tabuleiro de jusante .	117

## Símbolos, Acrónimos e Abreviaturas

### Latinas Maiúsculas

- A – Matriz de estado de sistemas discretos no tempo
- $A_c$  – Matriz de estado de sistemas contínuos no tempo
- B – Matriz de entrada de sistemas discretos no tempo
- $B_2$  – Matriz de localização das forças externas
- $B_c$  – Matriz de entrada de sistemas contínuos no tempo
- C – Matriz de amortecimento ou Matriz de resposta de sistemas discretos no tempo
- $C_a$  – Matriz de localização das respostas em aceleração
- $C_d$  – Matriz de localização das respostas em deslocamento
- $C_m$  – Matriz diagonal com os amortecimentos modais
- $C_v$  – Matriz de localização das respostas em velocidade
- D – Matriz de transmissão direta de sistemas discretos no tempo
- $D_c$  – Matriz de transmissão direta de sistemas contínuos no tempo
- E – módulo de elasticidade
- H – Matriz das funções de transferência ou Matriz de Hankel
- $H_m$  – Matriz diagonal com as funções de transferência modais
- I – Matriz Identidade
- K – Matriz de rigidez
- $K_m$  – Matriz diagonal com as rigidezes modais
- M – Matriz de massa
- $M_m$  – Matriz diagonal com as massas modais
- N – número de pontos da amostra
- O – Matriz de observabilidade
- R – Matriz das funções de correlação
- S – Matriz dos espectros
- T – Matriz de Toeplitz

### Latinas Minúsculas

- c – constante de amortecimento
- $c_k$  – constante de amortecimento modal do modo k
- f – frequência (Hz)
- $f_k$  – frequência modal do modo k
- h – função de resposta a um impulso unitário

$i$  – unidade imaginária  
 $l$  – número de sensores utilizados  
 $m$  – massa  
 $m_k$  – massa modal do modo  $k$   
 $n$  – número de graus de liberdade  
 $p$  – excitação atuante  
 $t$  – tempo (s)  
 $u$  – deslocamento  
 $w$  – janela de observação  
 $x$  – vetor de estado  
 $y$  – vetor de respostas observadas

### **Gregas Maiúsculas**

$\Gamma$  – Matriz de controlabilidade  
 $\Delta$  – variação da grandeza associada  
 $\Theta$  – Matriz com os  $n$  vetores próprios complexos de um sistema  
 $\Lambda$  – Matriz diagonal com os  $n$  valores próprios complexos de um sistema  
 $\Lambda_c$  – Matriz diagonal com os  $n$  valores próprios complexos de um sistema e os seus conjugados  
 $\Phi$  – Matriz modal

### **Gregas Minúsculas**

$\alpha$  – constante do amortecimento de Rayleigh ou coeficiente de normalização dos modos  
 $\beta$  – constante do amortecimento de Rayleigh  
 $\gamma^2$  – função de coerência  
 $\delta$  – decremento logarítmico, função impulsiva delta de Dirac ou delta de Kronecker  
 $\lambda$  – valores próprios de sistemas contínuos no tempo  
 $\mu$  – valores próprios de sistemas discretos no tempo  
 $\xi$  – coeficiente de amortecimento  
 $\xi_k$  – coeficiente de amortecimento modal do modo  $k$   
 $\Phi$  – vetor próprio do sistema  
 $\omega$  – frequência angular (rad/s)

$\omega_a$  – frequência amortecida (rad/s)

$\omega_k$  – frequência angular do modo  $k$  (rad/s)

### **Siglas e Acrónimos**

ANPSD – Espectro médio normalizado

EFDD – Método da decomposição no domínio da frequência melhorado

FDD – Método da decomposição no domínio da frequência

FFT – Transformada rápida de Fourier

FRF – Função de resposta em frequência

NPSD – Espectro normalizado

PP – Método Peak Picking

SSI-COV – Método da identificação estocástica em sub-espacos a partir das correlações

SVD – Decomposição em valores singulares









# 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1. MOTIVAÇÃO

A crescente preocupação em otimizar as estruturas de Engenharia Civil, aliada a uma maior capacidade de cálculo e modelação numérica, tem permitido projetar de forma mais arrojada obras de arte, muitas vezes de grande flexibilidade, fruto da utilização de materiais de grande resistência. Neste contexto, os ensaios de caraterização estrutural ganham grande importância como forma de validar as simplificações adotadas na criação do modelo, inevitáveis em qualquer projeto de Engenharia Civil, devido, por exemplo, às condições de apoio ou caraterísticas mecânicas do mesmo, a partir da caraterização do comportamento dinâmico da estrutura (frequências naturais, modos próprios de vibração e amortecimentos modais).

Tradicionalmente, este estudo era realizado recorrendo a ensaios de vibração forçada, em que a resposta da estrutura pode ser monitorizada quando esta se encontra sujeita a uma excitação bem controlada e conhecida. Como é evidente, para que esta premissa seja cumprida, é inevitável restringir ou mesmo interditar a utilização da estrutura em estudo durante um determinado período de tempo, o que pode acarretar consigo custos mais ou menos importantes, implicando ainda a mobilização de equipamento de grande porte.

Em contraponto com o acima exposto, os ensaios de vibração ambiental, utilizam as ações naturais (como vento ou tráfego) e a respetiva resposta da estrutura a estas para a caraterizar dinamicamente, permitindo assim uma análise de baixo custo, não condicionante do normal funcionamento da mesma e sem recurso a equipamentos indutores da excitação.

Devido ao acima exposto, os ensaios de vibração ambiental têm vindo a ganhar espaço na identificação das caraterísticas dinâmica de estruturas de Engenharia Civil, pelo que se torna importante, nomeadamente por envolverem uma excitação desconhecida *a priori*, sistematizar conceitos estatísticos e matemáticos que permitam uma caraterização sistemática e consistente dos vários parâmetros envolvidos.

### 1.2. OBJETIVOS DO TRABALHO

Em função do cenário apresentado relativamente a ensaios de vibração ambiental, procurou-se compreender e fundamentar os métodos de identificação estocástica (associados a processos desconhecidos ou não determinados) que permitem caraterizar de forma o mais correta possível o comportamento dinâmico de uma determinada estrutura (neste trabalho focar-se-á sobretudo a análise em pontes). Neste sentido, desenvolveram-se as tarefas que de seguida se apresentam, com o respetivo propósito:

- Fundamentação teórica de vários modelos matemáticos que permitissem caraterizar dinamicamente uma estrutura qualquer, tendo-se assumido a linearidade dos sistemas e analisado quer formulações clássicas envolvendo a resolução de equações diferenciais, quer de segunda ordem, quer modelos de estado;
- Estudo e compreensão dos conceitos que fundamentam os métodos de identificação modal analisados, nomeadamente o método da seleção de picos (PP – “Peak Picking”), da decomposição no domínio da frequência (FDD – “Frequency Domain Decomposition”) e da identificação estocástica a partir de modelos de estado (SSI-COV – “COVariance-driven Stochastic Subspace Identification”);
- Desenvolvimento em MATLAB de rotinas que permitem, a partir das séries temporais da resposta de uma dada estrutura, realizar o seu estudo pelos diferentes métodos apresentados no ponto anterior;
- Utilização de respostas controladas e geradas artificialmente através do MATLAB para validar as rotinas criadas e melhor perceber, ilustrar e explorar as potencialidades e fragilidades dos vários métodos de identificação modal;
- Criação de rotinas em EXCEL e MATLAB que permitem calibrar um modelo numérico criado no ROBOT, melhorando as estimativas obtidas para frequências e configurações modais;
- Aplicação das várias rotinas criadas e dos diferentes métodos a uma caso concreto, utilizando-se para isso a ponte sobre o Rio Douro da A41;

### 1.3. ORGANIZAÇÃO DA TESE

Para além do capítulo introdutório, o trabalho que de seguida se apresentará encontra-se dividido em mais 5 capítulos, a saber:

- No segundo capítulo serão apresentados e fundamentados diferentes modelos matemáticos que permitem caraterizar dinamicamente um qualquer sistema, começando por modelos clássicos de resolução de equações diferenciais de segundo grau e terminando com formulações de estado, que utilizam equações diferenciais de primeira ordem, mas duplicam a dimensão do problema. Além disso, estes modelos serão aplicados inicialmente a estruturas mais simples com apenas um grau de liberdade e cuja excitação é conhecida à partida (determinísticos), efetuando depois a transição para sistemas mais complexos de dimensão múltipla e para cenários condizentes com os ensaios de vibração ambiental, ou seja, associados a processos estocásticos, ilustrando-se os diferentes resultados a partir de dois modelos simplificados de uma obra-de-arte;
- No terceiro capítulo, serão apresentados os métodos de identificação estocástica propriamente ditos, quer no domínio do tempo (SSI-COV), quer no domínio da frequência (PP e FDD), recorrendo-se ainda aos modelos já mencionados para melhor explorar e contrastar os vários métodos;
- No quarto capítulo aplicar-se-ão os métodos e rotinas por esta altura já validadas de identificação modal a uma estrutura real (a ponte sobre o Rio Douro da A41), cujos resultados serão comparados entre si e com os obtidos a partir de um modelo simplificado criado no *software* comercial ROBOT STRUCTURAL ANALYSIS a partir dos dados do projeto real da estrutura;
- No quinto capítulo procurar-se-á introduzir alterações ao modelo gerado de maneira a minimizar as diferenças entre resultados numéricos e experimentais, procurando obter assim uma melhor representação numérica da obra-de-arte em estudo;

- Por fim, no sexto e último capítulo deste trabalho, serão apresentadas as principais conclusões retiradas ao longo de todo o processo, bem como eventuais aspetos cujo aprofundamento em trabalhos futuros seja considerado relevante;



## 2

# MODELOS DINÂMICOS DE SISTEMAS LINEARES

## 2.1. INTRODUÇÃO

Como em qualquer problema de Engenharia Civil, os modelos matemáticos ajustados ao estudo dinâmico de uma determinada estrutura implicam a adoção de determinadas simplificações sobre a realidade física. No entanto, é fundamental que se consiga, de uma forma pelo menos aproximada, reproduzir e simular o comportamento real da mesma. Assim sendo, neste trabalho será considerado que as estruturas em análise se encontram em regime linear e que as suas características são constantes no tempo, sendo apresentadas primeiramente estruturas simples com apenas um grau de liberdade e fazendo depois a transição para sistemas mais complexos, cujo tratamento matemático implica a sua discretização em elementos finitos e consequente criação de matrizes do sistema. De forma a exemplificar os conceitos que irão ser apresentados, construiu-se um modelo simplificado de uma obra-de-arte no programa de cálculo automático ROBOT STRUCTURAL ANALYSIS, cujo tabuleiro se materializa pela secção apresentada na Figura 2.1.

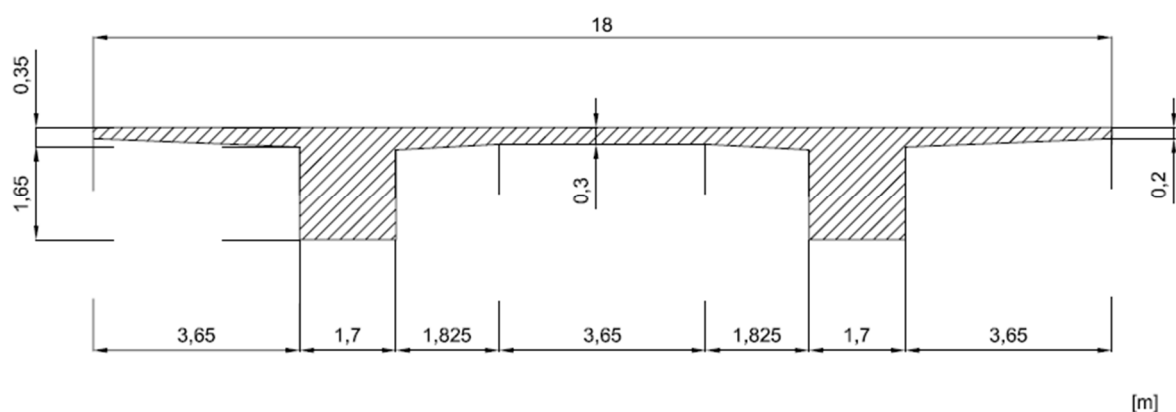


Figura 2.1 – Secção do caso de estudo

A secção apresentada considerou-se realizada em betão C25/30 ( $E = 31 \text{ GPa}$  e  $\rho = 24.53 \text{ kN/m}^3$ ), tendo portanto as características geométricas e físicas apresentadas no Quadro 2.1:

Quadro 2.1 – Caraterização da secção

Grandeza	Valor
Área [cm <sup>2</sup> ]	11.18
Inércia segundo a horizontal [m <sup>4</sup> ]	4.22
Peso linear [kN/m]	274.25
Massa linear [ton/m]	27.96

Para o desenvolvimento longitudinal da obra-de-arte, consideraram-se três vãos de 40 metros cada, ficando a estrutura final de acordo com a Figura 2.2.

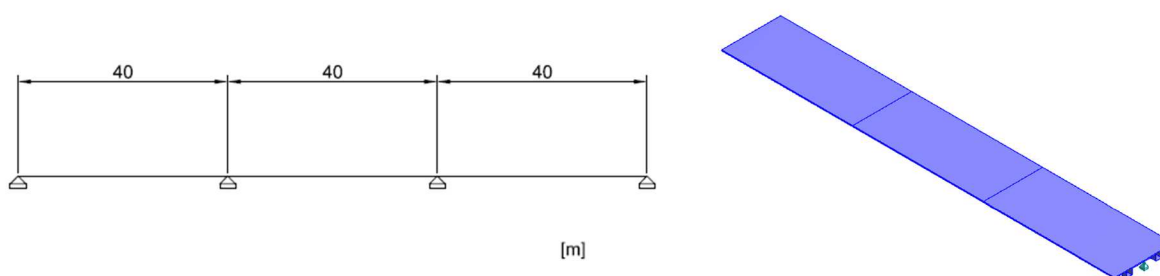


Figura 2.2 – Vista longitudinal e em perspectiva do modelo criado

Do ponto de vista matemático, serão apresentadas abordagens clássicas, que se baseiam na resolução de equações diferenciais de segunda ordem, em contraponto com formulações de estado, que ao duplicarem a dimensão do problema, permitem a sua redução para equações de primeiro grau e servirão de base aos métodos de identificação utilizados em capítulos posteriores.

Para a excitação que anima a estrutura, serão consideradas situações em que a mesma é perfeitamente conhecida e permite a determinação da resposta estrutural (excitação determinística) e situações (como é o caso dos ensaios de vibração ambiental) em que a mesma é à partida desconhecida e em que apenas é possível caraterizar o movimento por ela induzido com base em conceitos probabilísticos.

Além disso, e fruto também da natureza dos ensaios de vibração, os modelos matemáticos que se desenvolverão para exemplos teóricos que permitem a resolução de equações contínuas no tempo, terão de ser analisados de forma a permitir a caraterização de sistemas amostrados discretamente num determinado intervalo finito de tempo.

Por fim, é de salientar que apenas se sistematizou os conceitos considerados fundamentais para a compreensão adequada dos modelos apresentados, sendo possível encontrar mais detalhe sobre a análise dinâmica de estruturas nas referências (Chopra, 2011, Clough and Penzien, 1975) de um ponto de vista mais clássico, ou nas referências (Overschee and Moor, 1996, Pridham, 2005) em que também são abordadas as formulações de estado.

## 2.2. EXCITAÇÃO DETERMINÍSTICA

### 2.2.1. FORMULAÇÃO CLÁSSICA

#### 2.2.1.1. Sistema de um grau de liberdade

Na abordagem clássica de sistemas lineares de um grau de liberdade de rigidez  $k$ , assumindo um amortecimento do tipo viscoso, com um fator de amortecimento  $c$ , proporcional à velocidade da massa em estudo  $m$ , o equilíbrio do mesmo quando atuado pela ação  $p(t)$  impõe, como se encontra na referência (Chopra, 2011), que o movimento que o anima seja regido pela conhecida equação diferencial,

$$m \cdot \ddot{u}_1(t) + c \cdot \dot{u}_1(t) + k \cdot u_1(t) = p_1(t) \quad (2.1)$$

sendo  $\ddot{u}_1(t)$ ,  $\dot{u}_1(t)$  e  $u_1(t)$  a aceleração, velocidade e deslocamento da massa  $m$ . A sua solução, no domínio do tempo e para condições iniciais nulas,  $\dot{u}_1(0) = u_1(0) = 0$ , é dada pelo integral de convolução de Duhamel,

$$u_1(t) = \int_0^t p_1(\tau) \cdot h_1(t - \tau) \cdot \partial\tau \quad , t > 0 \quad (2.2)$$

sendo  $h_1(t - \tau)$  a resposta do sistema no instante  $(t - \tau)$  a um impulso unitário actuante no instante  $\tau$ , e definida da seguinte forma

$$h_1(t - \tau) = \frac{1}{m \cdot \omega_{1a}} \cdot e^{-\omega_1 \cdot \xi \cdot (t - \tau)} \cdot \text{sen}[\omega_{1a} \cdot (t - \tau)] \quad , t > \tau \quad (2.3)$$

Na equação (2.3), as grandezas  $\xi$ ,  $\omega_{1a}$  e  $\omega_1$  representam, respectivamente, o coeficiente de amortecimento, a frequência amortecida e a frequência natural do sistema, que se relacionam da seguinte forma entre si e com as características do mesmo:

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_{1a} = \omega_1 \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \end{cases} \quad (2.4)$$

Uma resolução alternativa da equação diferencial apresentada, que se revelará de grande interesse como será demonstrado ao longo deste trabalho, consiste em transpô-la para o domínio da frequência por aplicação, a cada um dos seus membros, da transformação de Fourier, definida do seguinte modo para a função genérica  $f(t)$ :

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} \cdot \partial t \quad (2.5)$$

Como se demonstra na referência (Bracewell, 2000), a derivação no domínio do tempo tem como correspondência, no domínio da frequência, a multiplicação por  $i \cdot \omega$ , sendo  $i = \sqrt{-1}$  a unidade imaginária. Assim, e representando  $U_1(\omega)$  e  $P_1(\omega)$  as transformadas de  $u_1(t)$  e  $p_1(t)$  respetivamente, a equação (2.1) facilmente se transforma em:

$$-m \cdot \omega^2 \cdot U_1(\omega) + i \cdot \omega \cdot c \cdot U_1(\omega) + k \cdot U_1(\omega) = P_1(\omega) \quad (2.6)$$

Da análise desta nova expressão, pode-se constatar que a resposta do sistema é agora obtida diretamente a partir da excitação a que este se encontra sujeito. De facto,

$$U_1(\omega) = \frac{1}{-m \cdot \omega^2 + i \cdot \omega \cdot c + k} \cdot P_1(\omega) = H_1(\omega) \cdot P_1(\omega) \quad (2.7)$$

Como a operação de convolução expressa na equação (2.2) corresponde, no novo domínio, ao produto das duas transformadas das funções em causa (Bracewell, 2000), então, torna-se evidente que a função representada por  $H_1(\omega)$  na equação (2.7), terá que corresponder à transformada de Fourier da função de resposta a um impulso unitário, definida na equação (2.3). Fazendo uso de conhecidas relações da Dinâmica de Estruturas, pode-se reescrever a função  $H_1(\omega)$  – designada de função de resposta em frequência (ou FRF) - do seguinte modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ c = 2 \cdot \xi \cdot m \cdot \omega_1 \end{array} \right. \longrightarrow H_1(\omega) = \frac{1/m}{\omega_1^2 - \omega^2 + 2 \cdot i \cdot \xi \cdot \omega \cdot \omega_1} \quad (2.8)$$

A FRF, como a sua designação permite antever, permite a conversão, dentro do seu domínio de validade, da excitação atuante sobre um oscilador de um grau de liberdade para a respetiva resposta do mesmo. Como se pode constatar da equação (2.8), esta função é constituída por entidades complexas, ou seja, o seu termo genérico em correspondência com a frequência  $\omega_j$  pode ser escrito como:

$$H_1(\omega_j) = (a + i \cdot b) \in \mathbb{C}, \quad (a, b) \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

Assim, para a sua representação gráfica torna-se útil apresentar separadamente o valor de amplitude da função (  $|H_1(\omega_j)| = \sqrt{a^2 + b^2}$  ) e o seu retrato de fase (  $\tan^{-1}(b/a)$  ). Estes conceitos são de seguida ilustrados na Figura 2.3, em função da frequência  $\omega$ , para um oscilador com massa e rigidez unitária e coeficiente de amortecimento a variar entre 1% e 25%.

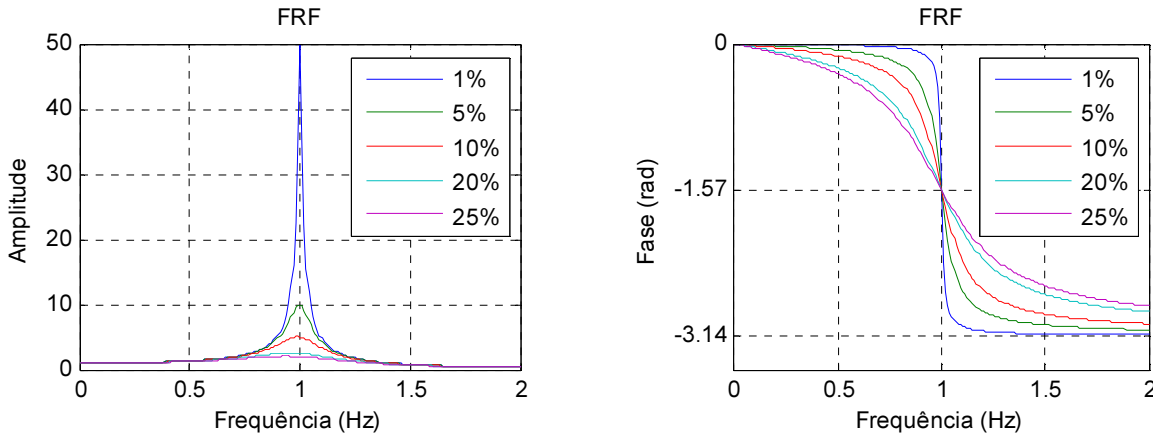


Figura 2.3 – Funções de resposta em frequência (adaptado de (Magalhães, 2004))



Como também se pode deduzir da equação (2.8), a amplitude da FRF apresenta um máximo em concordância com a abcissa  $\omega = \omega_1 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$ , o que para valores correntes do amortecimento de estruturas se transforma em  $\omega \cong \omega_1$ , e para o qual se verifica uma mudança de fase de  $\pi$  radianos. Além disso, pode-se ainda constatar que a um aumento do coeficiente de amortecimento estão associados um desvio do pico da amplitude para valores ligeiramente inferiores à frequência natural do sistema, e uma diminuição relativamente acentuada do seu valor.

Da maneira que a função de resposta em frequência foi apresentada, a sua expressão permite relacionar os deslocamentos da estrutura com a respetiva excitação, designando-se assim de *função de recetância* (que se representará de seguida como  $H_{1r}(\omega)$ ). No entanto, e devido à propriedade já apresentada relativa à derivação no domínio da frequência, é possível escrever as funções de *mobildade* ( $H_{1m}(\omega)$ ) e *inertância* ( $H_{1i}(\omega)$ ), que relacionam, respetivamente, a excitação com velocidades e acelerações, multiplicando sucessivamente por  $i \cdot \omega$ , ou seja:

$$\begin{cases} H_{1r}(\omega) = H_1(\omega) \\ H_{1m}(\omega) = i \cdot \omega \cdot H_1(\omega) \\ H_{1i}(\omega) = -\omega^2 \cdot H_1(\omega) \end{cases} \quad (2.10)$$

### 2.2.1.2 Sistemas de múltiplos graus de liberdade

Do mesmo modo que foi apresentado para os sistemas unidimensionais, as expressões introduzidas podem ser generalizadas para problemas de dimensão  $n$ , passando a equação que rege o movimento a ser escrita em formato matricial do seguinte modo:

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{C} \cdot \dot{\underline{u}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{u}(t) = \underline{p}(t) \quad (2.11)$$

A equação (2.11) traduz, portanto, um sistema, de ordem  $n$ , de equações diferenciais de segunda ordem, em que  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  e  $\underline{K}$  representam as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema, sendo os termos  $\underline{u}_{ij}$  forças generalizadas na coordenada  $i$  quando é aplicada uma aceleração, velocidade ou deslocamento na direção  $j$ , respetivamente. A resolução deste sistema no domínio temporal, poderia ser realizada recorrendo a um somatório de  $n$  funções de resposta a um impulso unitário (de acordo com a equação (2.3)), para cada grau de liberdade, como se encontra na referência (Caetano, 1992). No entanto, e se o amortecimento assumido for do tipo proporcional (como é frequentemente considerado), é possível resolver  $n$  equações diferenciais linearmente independentes através da designada formulação modal.

#### Formulação Modal

Recorrendo a esta formulação, que de seguida se apresenta, é possível caracterizar o vetor dos deslocamentos da estrutura no espaço geométrico a partir das coordenadas generalizadas (amplitude) de  $n$  modos de vibração da estrutura linearmente independentes. Assim, para a vibração livre de um sistema, se a solução matemática for do tipo

$$\underline{u}(t) = \underline{\phi}_k \cdot e^{\lambda_k t} \quad (2.12)$$

em que  $\underline{\phi}_k$  representa o  $k$ -ésimo modo de vibração, então a equação do movimento não amortecido transforma-se no problema de valores e vetores próprios expresso por:

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{K} \cdot \underline{u}(t) = \underline{0} \longrightarrow (\underline{M}^{-1} \cdot \underline{K}) \cdot \underline{\phi}_k = -\lambda_k^2 \cdot \underline{\phi}_k \quad (2.13)$$

Da resolução da equação (2.13) resultam  $n$  valores e vetores próprios que se relacionam, respetivamente, com as frequências e modos de vibração da estrutura. Se esses modos forem organizados numa matriz (matriz modal) em que a coluna  $k$  está associada ao modo  $\underline{\phi}_k$ , e tirando proveito das condições de ortogonalidade expressas e demonstradas na referência (Chopra, 2011), é então possível escrever:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_k = i \cdot \omega_k \\ \underline{\Phi}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_k & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \\ \underline{\Phi}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_k & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

em que  $k_k$  e  $m_k$  representam respetivamente a rigidez e a massa modal associadas ao modo  $k$  e demonstra que o sistema expresso na equação (2.11) pode, de facto, ser separado em  $n$  equações diferenciais linearmente independentes para sistemas não amortecidos. No entanto, é ainda possível provar, como se encontra na referência (Clough and Penzien, 1975), que se a distribuição de amortecimento for considerada proporcional à distribuição de massa e rigidez ao longo da estrutura, a ortogonalidade dos vários modos pode também ser estendida à matriz de amortecimento. Por amortecimento proporcional entende-se que esta matriz pode ser obtida através de uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, sendo um caso bastante conhecido desta aplicação a formulação de Rayleigh, que não é mais do que uma concretização da expressão generalizada de amortecimento proporcional tomando em conta apenas os dois primeiros termos do somatório que de seguida se apresenta:

$$\underline{C} = \underline{M} \cdot \sum_{j=0}^{b \leq n} a_j \cdot [\underline{M}^{-1} \cdot \underline{K}]^j \xrightarrow{\text{amortecimento de Rayleigh}} \underline{C} = \alpha \cdot \underline{M} + \beta \cdot \underline{K} \quad (2.15)$$

Se o estipulado na equação (2.15) for respeitado, então a matriz de amortecimento também respeitará as condições de ortogonalidade em relação aos modos de vibração da estrutura, pelo que, assumindo a mesma solução genérica apresentada na equação (2.12), é possível escrever a resposta em vibração livre de cada modo, da seguinte forma:

$$m_k \cdot \ddot{u}_{km}(t) + c_k \cdot \dot{u}_{km}(t) + k_k \cdot u_{km}(t) = 0 \longrightarrow m_k \cdot \lambda_k^2 + c_k \cdot \lambda_k + k_k = 0 \quad (2.16)$$

Resolvendo e aplicando as propriedades presentes na equação (2.8), obtém-se então:

$$\lambda_k, \lambda_k^* = -\xi_k \cdot \omega_k \pm i \cdot \sqrt{1 - \xi_k^2} \cdot \omega_k \quad (2.17)$$

Assim, o anterior sistema de  $n$  equações diferenciais de segunda ordem acopladas pode ser reescrito no espaço modal através de um mesmo número de equações linearmente independentes, substituindo-se, portanto, a resolução de um só problema de dimensão  $n$ , pela resolução  $n$  problemas independentes, aos quais podem ser aplicados os procedimentos já expostos para osciladores de um grau de liberdade. Estas expressões podem ser escritas do seguinte modo:

$$m_k \cdot \ddot{u}_{km}(t) + c_k \cdot \dot{u}_{km}(t) + k_k \cdot u_{km}(t) = \underline{\phi}_k^T \cdot \underline{p}(t) = p_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.18)$$

ou adotando uma representação matricial e recorrendo à matriz modal

$$\underline{M}_m \cdot \ddot{\underline{u}}_m(t) + \underline{C}_m \cdot \dot{\underline{u}}_m(t) + \underline{K}_m \cdot \underline{u}_m(t) = \underline{\Phi}^T \cdot \underline{p}(t) \quad (2.19)$$

em que o índice  $m$  traduz matrizes diagonais cujos termos não nulos coincidem com as massas, amortecedores e rigidezes modais, respetivamente, à semelhança do que se encontra na equação (2.14). A resposta da estrutura vem então dada pelo somatório das respostas em cada modo escaladas pela coordenada modal  $u_{km}(t)$ .

$$\underline{u}(t) = \sum_{k=1}^n \underline{\phi}_k \cdot u_{km}(t) \quad (2.20)$$

**Exemplo 2.1** - Tendo o modelo caracterizado na Figura 2.2., bem como as suas propriedades físicas e geométricas, foram calculadas as respetivas matrizes de rigidez e massa, discretizando cada vão em 4 segmentos, ficando um grau de liberdade associado a cada meio vão, bem como a cada quarto de vão. A matriz de rigidez ( $K$ ) foi calculada recorrendo ao programa de cálculo em que foi modelada a estrutura (ROBOT), bloqueando todos os graus de liberdade identificados e impondo sucessivamente um assentamento de apoio unitário naquele cuja correspondente coluna da matriz de rigidez se pretendia obter. Como exemplo, apresenta-se na Figura 2.4 o procedimento para o cálculo da primeira coluna dessa mesma matriz:

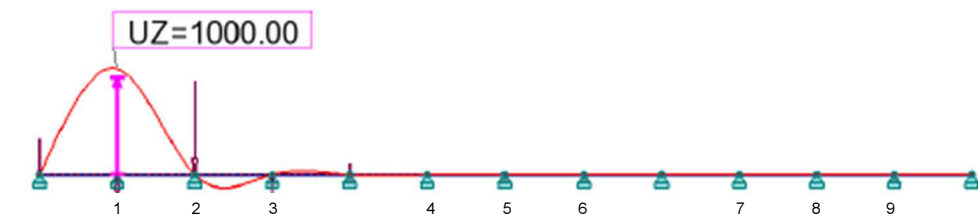


Figura 2.4 – Deformação para um assentamento de apoio (apresentado em mm) unitário no primeiro grau de liberdade (graus de liberdade numerados de 1 a 9 da esquerda para a direita)

\* complexo conjugado

As reações foram calculadas e exportadas para o Quadro 2.2 que de seguida se apresenta (note-se que a reação obtida no apoio genérico  $j$  corresponderá ao elemento  $k_{jl}$ ):

Quadro 2.2 – Reações obtidas para um assentamento unitário no primeiro grau de liberdade

Apoio	Reação [ $10^3$ kN]
1	1293.425
2	-1245.114
3	544.1596
4	39.06890
5	-10.46848
6	2.805016
7	0.2013169
8	-0.05368451
9	0.01342113

Para o cálculo da matriz de massa a integrar no cálculo, considerou-se uma distribuição de massa em função da largura de influência ( $l_i$ ) de cada grau de liberdade. Como a distância entre quaisquer dois graus de liberdade consecutivos é constante e igual a 10 metros, então este é o valor a considerar para  $l_i$ , de onde resulta:

$$\begin{cases} m_{ij} = 10 \times 27.9557 = 279.557 \text{ [ton]}, & \text{se } i = j \\ m_{ij} = 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.21)$$

A determinação da matriz de amortecimento baseou-se na formulação de Rayleigh de modo a impor um amortecimento nos dois primeiros modos de vibração igual a 0.2% (valor corrente de serviço para estruturas semelhantes, como se pode constatar na referência (Magalhães, 2010)). Como este amortecimento é do tipo proporcional, então a formulação modal do problema permite o tratamento do mesmo através da decomposição em valores e vetores próprios, segundo o estipulado na equação (2.13). Os primeiros estão relacionados com o quadrado das frequências (em  $rad/s$ ) não amortecidas da estrutura, enquanto os segundos retratam os seus modos de vibração. Desta decomposição obtiveram-se os seguintes resultados (nos alçados da Figura 2.5, o modo a azul corresponde à menor frequência representada e o modo a verde à maior):

$$\omega = \begin{Bmatrix} 13.3466 \\ 17.0984 \\ 24.9386 \\ 53.0149 \\ 60.0998 \\ 72.7317 \\ 112.5622 \\ 118.8909 \\ 128.0106 \end{Bmatrix} [rad/s], \quad \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.289 & -0.386 & 0.292 & 0.408 & 0.474 & 0.302 & 0.289 & -0.305 & 0.152 \\ 0.408 & -0.504 & 0.303 & 0 & -0.106 & -0.174 & -0.408 & 0.465 & -0.253 \\ 0.289 & -0.300 & 0.074 & -0.408 & -0.491 & -0.257 & 0.289 & -0.421 & 0.294 \\ -0.289 & 0.086 & 0.367 & 0.408 & -0.017 & -0.559 & -0.289 & -0.116 & 0.446 \\ -0.408 & 0 & 0.605 & 0 & -0.211 & 0 & 0.408 & 0 & -0.506 \\ -0.289 & -0.086 & 0.367 & -0.408 & -0.017 & 0.559 & -0.289 & 0.116 & 0.446 \\ 0.289 & 0.300 & 0.074 & 0.408 & -0.491 & 0.257 & 0.289 & 0.421 & 0.294 \\ 0.408 & 0.504 & 0.303 & 0 & -0.106 & 0.174 & -0.408 & -0.465 & -0.253 \\ 0.289 & 0.386 & 0.292 & -0.408 & 0.474 & -0.302 & 0.289 & 0.305 & 0.152 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

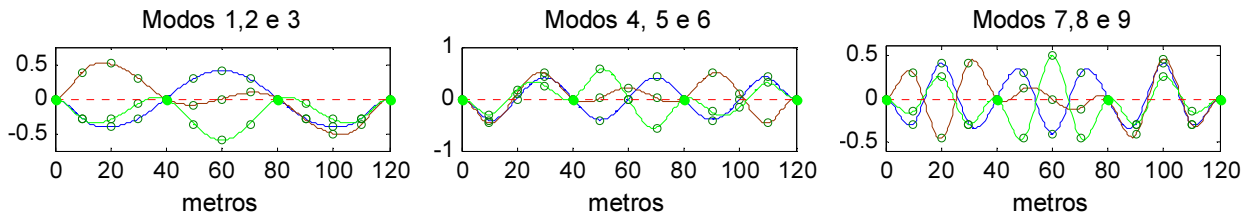


Figura 2.5 – Esboço dos modos identificados em alçado (o modo a azul corresponde à menor frequência representada e o modo a verde à maior)

Do apresentado na equação (2.15) pré-multiplicando por  $\underline{\phi}_k^T$  e multiplicando por  $\underline{\phi}_k$  a segunda igualdade, resulta

$$C_k = \alpha \cdot m_k + \beta \cdot k_k \longrightarrow \xi_k = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\alpha}{\omega_k} + \beta \cdot \omega_k \right) \quad (2.23)$$

Pelo que, para a condição já apresentada, facilmente se obtém

$$\begin{cases} \alpha = (2 \cdot \xi \cdot \omega_1 \cdot \omega_2) / (\omega_1 + \omega_2) \\ \beta = (2 \cdot \xi) / (\omega_1 + \omega_2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0.03 \text{ [s}^{-1}\text{]} \\ \beta = 1.3138 \times 10^{-4} \text{ [s]} \end{cases} \quad (2.24)$$

Por aplicação dos métodos acima explicitados, o sistema presente na equação (2.11) pode então ser concretizado com as seguintes matrizes:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \times 279.557 \text{ [ton]} \quad (2.25)$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 178.3 & -163.6 & 71.49 & 5.133 & -1.375 & 0.369 & 0.026 & -0.007 & 0.002 \\ & 249.8 & -182.7 & -20.53 & 5.502 & -1.474 & -0.106 & 0.028 & -0.007 \\ & & 254.9 & 77.00 & -20.63 & 5.528 & 0.397 & -0.106 & 0.026 \\ & & & 255.3 & -184.2 & 77.02 & 5.528 & -1.474 & 0.369 \\ & & & & 255.3 & -184.2 & -20.63 & 5.502 & -1.375 \\ & & & & & 255.3 & 77.00 & -20.53 & 5.133 \\ & & & & & & 254.9 & -182.7 & 71.49 \\ & & & & & & & 249.8 & -163.6 \\ & & & & & & & & 178.3 \end{bmatrix} \text{ [kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}\text{]} \quad (2.26)$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 1293 & -1245 & 544.2 & 39.07 & -10.47 & 2.805 & 0.201 & -0.054 & 0.013 \\ & 1838 & -1391 & -156.3 & 41.87 & -11.22 & -0.805 & 0.215 & 0.054 \\ & & 1877 & 586.0 & -157.0 & 42.08 & 3.010 & -0.805 & 0.201 \\ & & & 1880 & -1402 & 586.3 & 42.08 & -11.22 & 2.805 \\ & & & & 1880 & -1402 & -157.0 & 41.87 & -10.47 \\ & & & & & 1880 & 586.0 & -156.3 & 39.07 \\ & & & & & & 1877 & -1391 & 544.2 \\ & & & & & & & 1838 & -1245 \\ & & & & & & & & 1293 \end{bmatrix} \text{ [kN} \cdot \text{m}^{-1}\text{]} \quad (2.27)$$

Com a caraterização matricial completa, procedeu-se ao cálculo dos amortecimentos associados a cada modo através da expressão (2.23) e à conversão das frequências naturais em *rad/s* para a sua representação mais habitual em *Hz*, representados no Quadro 2.3:

Quadro 2.3 – Frequências e amortecimentos modais – modelo 1

Modo	Frequência (Hz)	Coefficiente de amortecimento (%)
1	2.1242	0.2
2	2.7213	0.2
3	3.9691	0.22
4	8.4376	0.38
5	9.5652	0.42
6	11.5756	0.50
7	17.9148	0.75
8	18.9221	0.79
9	20.3735	0.85

Como se pode constatar, o amortecimento dos dois primeiros modos é o estipulado previamente, aumentando nos modos subsequentes. Outra conclusão que se revelará importante posteriormente é a invisibilidade de alguns modos em determinados graus de liberdade. Por exemplo, devido à simetria da estrutura, os modos pares não são detetados a meio vão do vão central, já que aqui se encontra um nodo (ponto de ordenada nula) dos mesmos.

Além disso foi criado um modelo alternativo – modelo 2 – que permitisse ilustrar algumas das limitações dos métodos que serão apresentados, tendo sido induzida uma diminuição da rigidez associada ao vão central do modelo já apresentado em 20% do seu valor inicial. Para isso, e de maneira a preservar a secção e a distribuição de massa, optou-se por aplicar uma redução no mesmo valor ao módulo de elasticidade do material nesse troço. Assim, e de modo análogo ao já efetuado, obtiveram-se os valores do Quadro 2.4:

Quadro 2.4 – Frequências e amortecimentos modais do modelo alternativo – modelo 2

Modo	Frequência (Hz)	Coefficiente de amortecimento (%)
1	1.6043	0.2
2	2.2903	0.2
3	2.6767	0.21
4	5.2821	0.31
5	8.2903	0.45
6	8.9981	0.48
7	9.6857	0.52
8	18.1913	0.94
9	18.2070	0.95

*Resolução no domínio da frequência*

À semelhança do que já foi efetuado para os sistemas de um grau de liberdade, é também possível adotar uma resolução no domínio da frequência, aplicando a transformação de Fourier a ambos os termos da equação (2.8), chegando-se à seguinte relação entre excitação e resposta:

$$\underline{U}(\omega) = \underline{H}(\omega) \cdot \underline{P}(\omega) \quad (2.28)$$

em que a matriz  $\underline{H}(\omega)$  tem dimensão  $n \times n$  e cujo termo genérico  $\underline{H}_{ij}(\omega)$  representa a FRF do sistema que relaciona a resposta segundo a coordenada  $i$  com o a excitação atuante em  $j$ . Como se encontra em (Magalhães, 2004) esta matriz pode ser obtida a partir das matrizes características do sistema através de:

$$\underline{H}(\omega) = [-\omega^2 \cdot \underline{M} + i \cdot \omega \cdot \underline{C} + \underline{K}]^{-1} \quad (2.29)$$

No entanto, e devido à formulação modal já apresentada, é possível, através de um processo numérico muito mais eficiente do que a inversão de matrizes complexas presente na equação (2.29) (tantas quantas os pontos a representar), calcular a matriz das FRF discriminando a contribuição de cada modo através da expressão:

$$\underline{H}(\omega) = \sum_{k=1}^n \underline{\phi}_k \cdot H_{km}(\omega) \cdot \underline{\phi}_k^T = \underline{\Phi} \cdot \underline{H}_m(\omega) \cdot \underline{\Phi}^T \quad (2.30)$$

em que a matriz apresentada como  $\underline{H}_m(\omega)$  é diagonal e contém nos termos  $H_{km}(\omega)$  as funções de resposta em frequência no espaço modal definidas para cada modo como:

$$H_{km}(\omega) = \frac{1/m_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2 \cdot i \cdot \xi_k \cdot \omega \cdot \omega_k} \quad (2.31)$$

Do acima exposto, facilmente se deduz que qualquer elemento da matriz das FRF pode ser calculado através de:

$$\underline{H}_{(a,b)}(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{1/m_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2 \cdot i \cdot \xi_k \cdot \omega \cdot \omega_k} \cdot \underline{\Phi}_{a,k} \cdot \underline{\Phi}_{b,k} \quad (2.32)$$

**Exemplo 2.2** – De acordo com a equação (2.31), calcularam-se as FRF de cada modo, para as quais se apresenta graficamente a amplitude, para ambos os modelos já apresentados (Figura 2.6 e Figura 2.7):

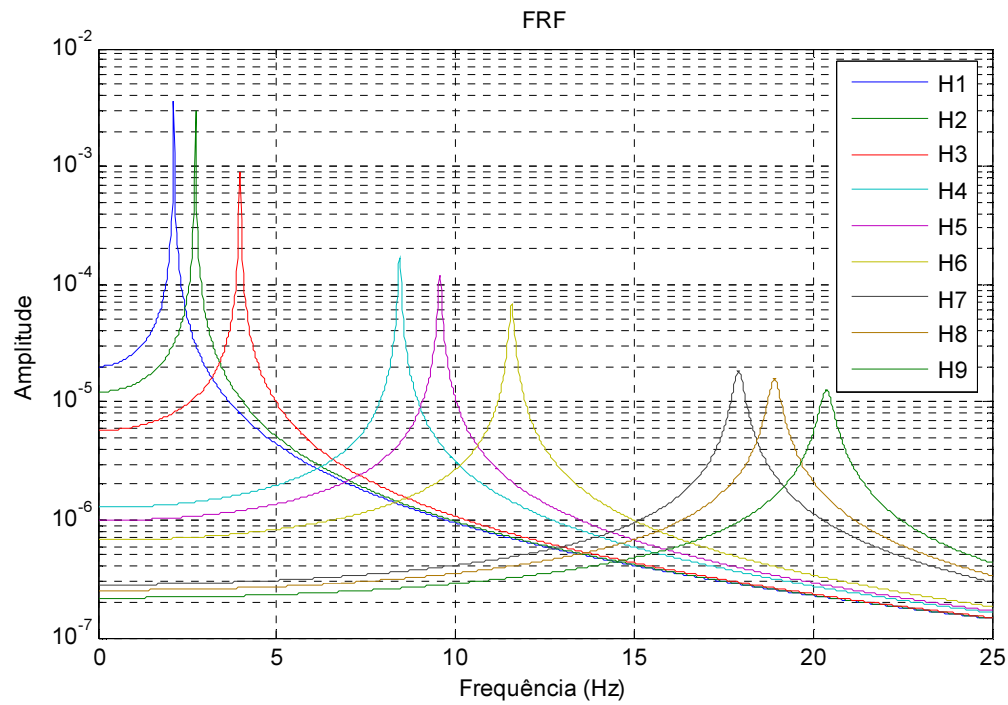


Figura 2.6 – FRF no espaço modal do modelo de base (modelo 1)

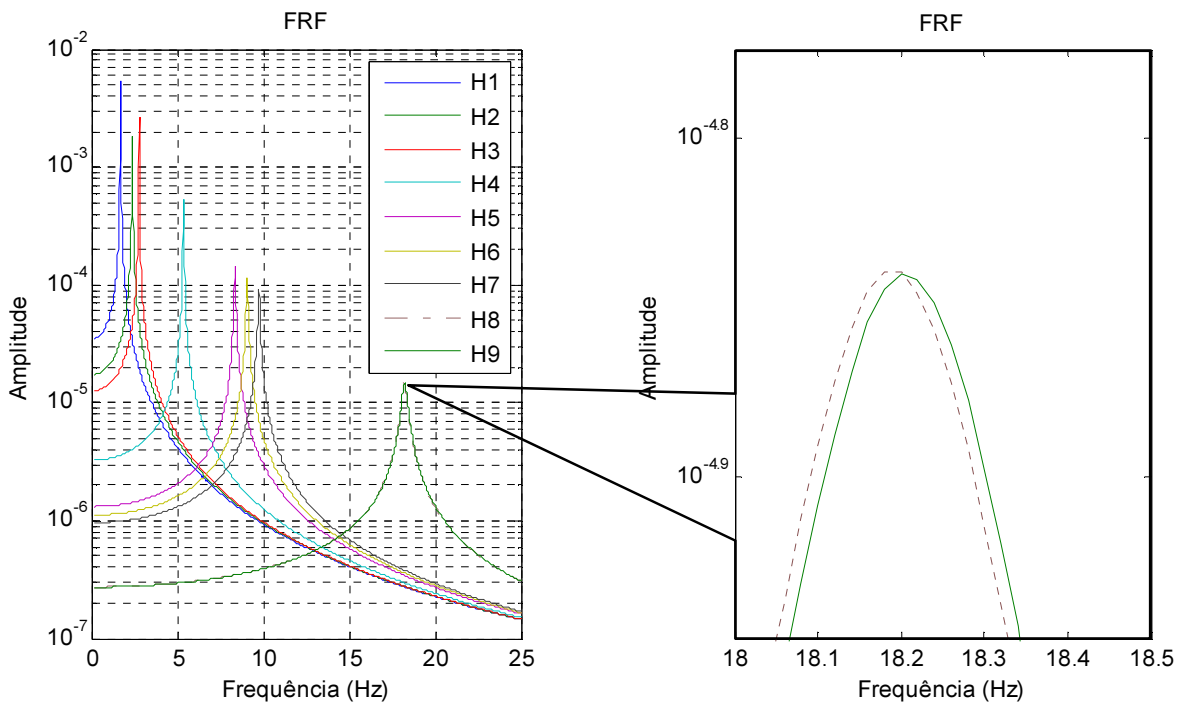


Figura 2.7 – FRF no espaço modal para o modelo alternativo (modelo 2)

Além disso, e de acordo com a equação (2.32), foram calculadas as 81 ( $9 \times 9$ ) FRF em deslocamento do sistema, que se agrupam na matriz  $\underline{H}_r(\omega)$ , segundo a nomenclatura apresentada na equação (2.10). De seguida, apresenta-se nas Figuras 2.8 e 2.9 a representação gráfica da amplitude e fase da primeira coluna dessa matriz, avaliada de 0.02 em 0.02 Hz.



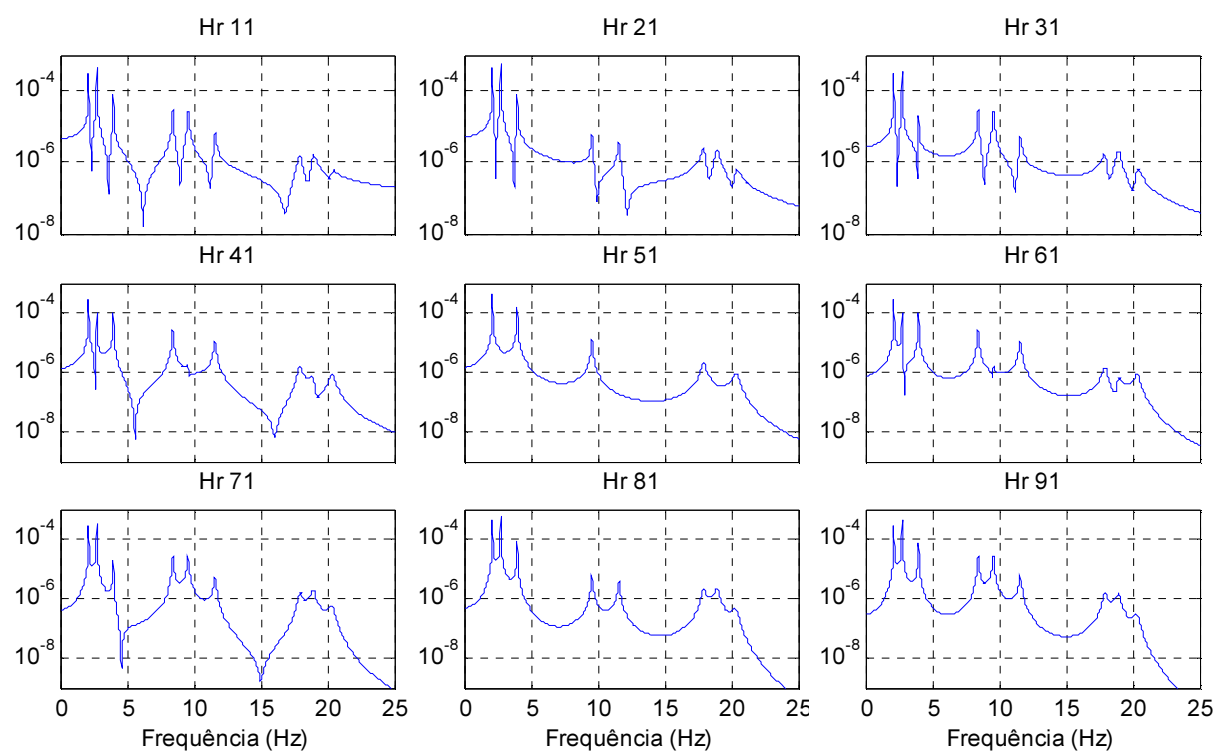


Figura 2.8 – Amplitude das funções da 1ª coluna da matriz das FRF – modelo 1

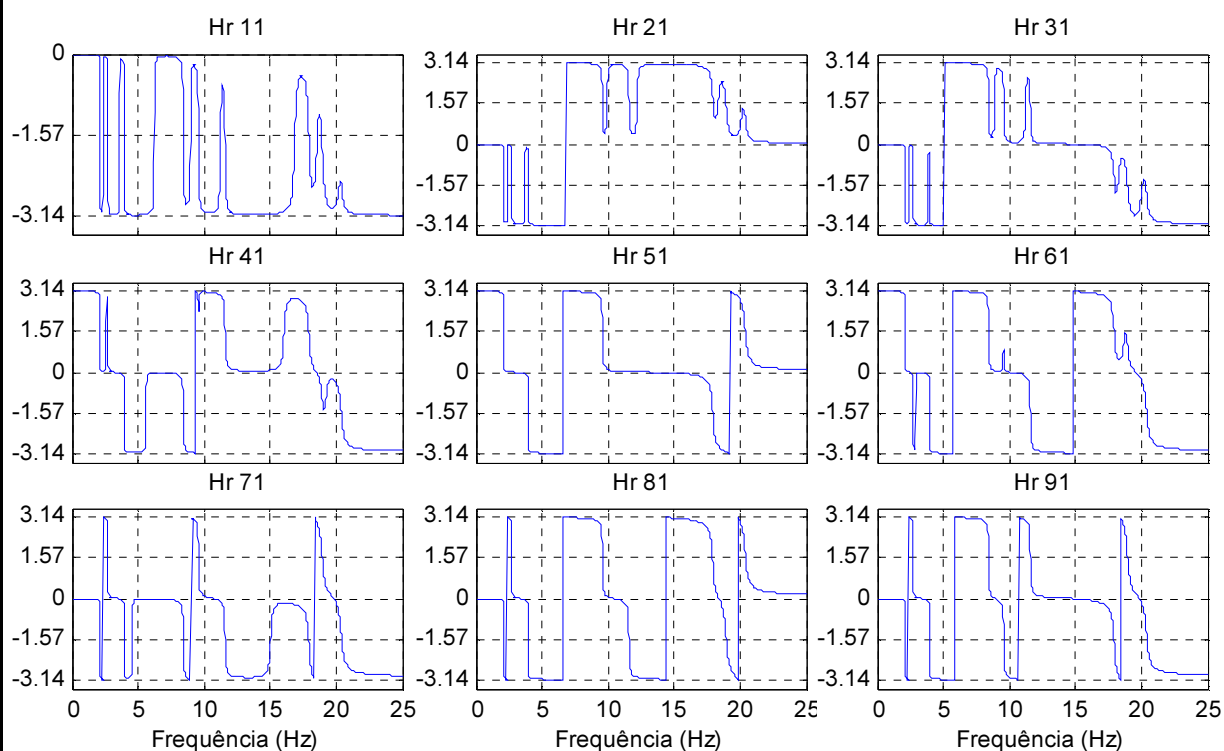


Figura 2.9 – Retrato de fase das funções da 1ª coluna da matriz das FRF – modelo 1

## 2.2.2. FORMULAÇÃO DE ESTADO

### 2.2.2.1. Modelos Contínuos

Nesta nova abordagem matemática de resolução de sistema de equações diferenciais de segunda ordem, a formulação matricial previamente apresentada, de dimensão  $n$ , transforma-se num novo sistema de dimensão  $2n$ . Para tal, é importante definir um vetor  $\underline{x}(t)$ , vetor de estado, que contém os deslocamentos  $\underline{u}(t)$ , bem como as suas primeiras derivadas  $\underline{\dot{u}}(t)$ . O modelo de estado é assim constituído, de uma forma genérica, por uma equação de estado, que depende das características do sistema em estudo, e por uma equação de observação, que relaciona as respostas medidas ou observadas, com o vetor de estado e a excitação a que este se encontra sujeita. Como se encontra na referência (Juang, 1994), a equação de estado pode ser escrita, em função das matrizes de massa, rigidez e amortecimento da seguinte forma:

$$\underline{P} \cdot \dot{\underline{x}}(t) + \underline{Q} \cdot \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \underline{p}(t) \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_2 \\ \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \underline{f}(t) \quad (2.33)$$

em que a matriz  $\underline{B}_2$ , constituída por zeros e uns, relaciona os graus de liberdade sujeitos à excitação com os graus de liberdade do modelo numérico. As restantes matrizes relacionam-se com as matrizes do sistema da seguinte forma (Pridham, 2005):

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \underline{u}(t) \\ \underline{\dot{u}}(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{M} \\ \underline{M} & \underline{0} \end{bmatrix}, \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{M} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

De forma a apresentar a equação de estado na sua forma canónica, é suficiente pré-multiplicar todos os termos presentes pela inversa da matriz  $\underline{P}$  e, isolando o termo  $\dot{\underline{x}}(t)$ , obtém-se então

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}_c \cdot \underline{x}(t) + \underline{B}_c \cdot \underline{f}(t) \quad (2.35)$$

em que  $\underline{A}_c$  e  $\underline{B}_c$  representam as designadas matrizes de estado e de entrada, respetivamente, e o índice  $c$  indica que estas estão associadas a um modelo contínuo no tempo, podendo ser calculadas por

$$\underline{A}_c = -\underline{P}^{-1} \cdot \underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{M}^{-1} \cdot \underline{K} & -\underline{M}^{-1} \cdot \underline{C} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\underline{B}_c = \underline{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underline{B}_2 \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}^{-1} \cdot \underline{B}_2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Assumindo uma solução genérica semelhante à adotada na formulação clássica ( $\underline{u}(t) = \underline{\phi}_k \cdot e^{\lambda_k \cdot t}$ ), a forma homogénea ( $\underline{B}_c \cdot \underline{f}(t) = \underline{0}$ ) da equação de estado apresentada em (2.35) pode ser reescrita através do problema de valores e vetores próprios

$$(-\underline{P}^{-1} \cdot \underline{Q}) \cdot e^{\lambda_k \cdot t} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\phi}_k \\ \underline{\phi}_k \cdot \lambda_k \end{bmatrix} = \lambda_k \cdot e^{\lambda_k \cdot t} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\phi}_k \\ \underline{\phi}_k \cdot \lambda_k \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{A}_c \cdot \begin{bmatrix} \underline{\phi}_k \\ \underline{\phi}_k \cdot \lambda_k \end{bmatrix} = \lambda_k \cdot \begin{bmatrix} \underline{\phi}_k \\ \underline{\phi}_k \cdot \lambda_k \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Se os valores e vetores próprios resultantes da equação (2.38) forem agrupados em matrizes, então obtém-se, como se encontra na referência (Peeters, 2000)

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\Lambda}_c = \begin{bmatrix} \underline{\Lambda} & \\ & \underline{\Lambda}^* \end{bmatrix} \\ \underline{\Psi} = \begin{bmatrix} \underline{\Theta} & \underline{\Theta}^* \\ \underline{\Theta} \cdot \underline{\Lambda} & \underline{\Theta}^* \cdot \underline{\Lambda}^* \end{bmatrix} \end{array} \right. \longrightarrow \underline{\Lambda}_c = \underline{\Psi} \cdot \underline{\Lambda}_c \cdot \underline{\Psi}^{-1} \quad (2.39)$$

sendo que

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \lambda_k & \\ & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \underline{\Theta} = [\dots \quad \underline{\phi}_k \quad \dots] \quad (2.40)$$

A partir do acima exposto, pode-se portanto concluir que a matriz de estado transporta a informação necessária para a definição do sistema dinâmico, obtida através da sua decomposição em valores e vetores próprios. À semelhança da formulação clássica, os valores obtidos para  $\lambda_k$  relacionam-se com as frequências não amortecidas e com os amortecimentos modais a partir da equação (2.23).

Os modos de vibração obtidos por esta formulação podem ser complexos (ou seja, pontos diferentes da estrutura atingem os seus máximos deslocamentos em cada modo de forma não simultânea). No entanto, como se encontra em (Peeters, 2000), se a matriz de amortecimento considerada for do tipo proporcional, os resultados obtidos serão reais, ou pelo menos, possuirão um ângulo de fase constante, o que os torna passíveis de serem escalados para o espaço real.

A equação de observação, pode ser escrita a partir dos valores observados (deslocamentos, velocidades e/ou acelerações) nos  $l$  graus de liberdade monitorizados (com  $l < n$ ).

$$\underline{y}(t) = \underline{C}_a \cdot \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{C}_v \cdot \dot{\underline{u}}(t) + \underline{C}_d \cdot \underline{u}(t) \quad (2.41)$$

em que as matrizes  $\underline{C}$  acopladas dos índices  $a$ ,  $v$  ou  $d$ , são constituídas por uns e zeros e se destinam a identificar os graus de liberdade monitorizados com os seus correspondentes do modelo numérico, conforme identificam acelerações, velocidades ou deslocamentos, respetivamente. Note-se que no contexto de um ensaio de vibração ambiental, é comum medirem-se exclusivamente as acelerações, sendo portanto as restantes matrizes nulas. Definindo as matrizes de resposta e de transmissibilidade direta,  $\underline{C}_c$  e  $\underline{D}_c$ , da seguinte forma

$$\underline{C}_c = [\underline{C}_d - \underline{C}_a \cdot \underline{M}^{-1} \cdot \underline{K} \quad \underline{C}_v - \underline{C}_a \cdot \underline{M}^{-1} \cdot \underline{C}] \quad (2.42)$$

$$\underline{D}_c = [\underline{C}_a \cdot \underline{M}^{-1} \cdot \underline{B}_2] \quad (2.43)$$

é possível transformar a equação (2.41) na equação de observação, função do vetor de estado e da excitação,

$$\underline{y}(t) = \underline{C}_c \cdot \underline{x}(t) + \underline{D}_c \cdot \underline{f}(t) \quad (2.44)$$

O modelo de estado que carateriza o sistema, resulta, então, da consideração simultânea das equações (2.35) e (2.44).

**Exemplo 2.3** – Para o exemplo apresentado com rigidez uniforme ao longo de todo o desenvolvimento, foi calculada a matriz de estado a partir da equação (2.36). A partir desta e da sua decomposição em valores próprios, chegou-se aos seguintes resultados:

$$diag(\underline{\Lambda}) = \begin{bmatrix} -1.092 \pm 128.01 \cdot i \\ -0.944 \pm 118.89 \cdot i \\ -0.847 \pm 112.56 \cdot i \\ -0.363 \pm 72.73 \cdot i \\ -0.252 \pm 60.10 \cdot i \\ -0.200 \pm 53.01 \cdot i \\ -0.056 \pm 24.94 \cdot i \\ -0.034 \pm 17.10 \cdot i \\ -0.027 \pm 13.35 \cdot i \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

A partir destes valores, é possível, como se encontra na referência (Magalhães and Cunha, 2011), calcular as frequências e os modos de vibração a partir de:

$$f_k = \frac{|\lambda_k|}{2\pi} \quad (2.46)$$

$$\xi_k = -\frac{Real(\lambda_k)}{|\lambda_k|} \quad (2.47)$$

Com estas relações, obtiveram-se os seguintes valores para o modelo em estudo

$$f_k = \begin{bmatrix} 20.3735 \\ 18.9221 \\ 17.9148 \\ 11.5756 \\ 9.5652 \\ 8.4376 \\ 3.9691 \\ 2.7213 \\ 2.1242 \end{bmatrix} [Hz], \quad \xi_k = \begin{bmatrix} 0.85 \\ 0.79 \\ 0.75 \\ 0.50 \\ 0.42 \\ 0.38 \\ 0.22 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} [\%] \quad (2.48)$$

Os vetores próprios obtidos, sendo o amortecimento assumido proporcional, correspondem a modos reais, pelo que surgem em duplicado já que estes (primeiras  $n$  colunas) e os seus complexos conjugados (últimas  $n$  colunas) são iguais. Além disso, e sendo a relação entre as primeiras e as últimas  $n$  linhas apenas o fator de escala  $\lambda_k$  para cada modo, optou-se por ilustrar o que acaba de ser afirmado para as primeiras duas colunas, sendo de seguida apresentados apenas os modos já normalizados, de forma a serem exclusivamente representados no espaço real e possuírem norma unitária

$$\underline{\Psi}_{(1:9,1)} = \underline{\Psi}_{(1:9,2)} = \begin{Bmatrix} 0.1011 \\ -0.1685 \\ 0.1958 \\ 0.2969 \\ -0.3369 \\ 0.2969 \\ 0.1958 \\ -0.1685 \\ 0.1011 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} + i \cdot \begin{Bmatrix} 0.0012 \\ -0.002 \\ 0.0023 \\ 0.0035 \\ -0.0040 \\ 0.0035 \\ 0.0023 \\ -0.0020 \\ 0.0012 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\times 1/(\underline{\Psi}_{(5,1)})} \begin{Bmatrix} -0.300 \\ 0.500 \\ -0.581 \\ -0.881 \\ 1.000 \\ -0.881 \\ -0.581 \\ 0.500 \\ -0.300 \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\underline{\Psi}_{(9:18,1)} = \underline{\Psi}_{(9:18,2)} = \begin{Bmatrix} -0.152 \\ 0.253 \\ -0.294 \\ -0.446 \\ 0.506 \\ -0.446 \\ -0.294 \\ 0.253 \\ -0.152 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\times 1/0.506} \begin{Bmatrix} -0.300 \\ 0.500 \\ -0.581 \\ -0.881 \\ 1.000 \\ -0.881 \\ -0.581 \\ 0.500 \\ -0.300 \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\underline{\Psi}_{(9:18,1:2:18)} = \begin{bmatrix} 0.289 & -0.386 & 0.292 & 0.408 & 0.474 & 0.302 & 0.289 & -0.305 & 0.152 \\ 0.408 & -0.504 & 0.303 & 0 & -0.106 & -0.174 & -0.408 & 0.465 & -0.253 \\ 0.289 & -0.300 & 0.074 & -0.408 & -0.491 & -0.257 & 0.289 & -0.421 & 0.294 \\ -0.289 & 0.086 & 0.367 & 0.408 & -0.017 & -0.559 & -0.289 & -0.116 & 0.446 \\ -0.408 & 0 & 0.605 & 0 & -0.211 & 0 & 0.408 & 0 & -0.506 \\ -0.289 & -0.086 & 0.367 & -0.408 & -0.017 & 0.559 & -0.289 & 0.116 & 0.446 \\ 0.289 & 0.300 & 0.074 & 0.408 & -0.491 & 0.257 & 0.289 & 0.421 & 0.294 \\ 0.408 & 0.504 & 0.303 & 0 & -0.106 & 0.174 & -0.408 & -0.465 & -0.253 \\ 0.289 & 0.386 & 0.292 & -0.408 & 0.474 & -0.302 & 0.289 & 0.305 & 0.152 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Como se pode constatar, os resultados obtidos pela abordagem que se apresentou são rigorosamente iguais aos que já tinham sido calculados a partir da formulação clássica.

#### 2.2.2.2. Modelos Discretos

Na formulação até agora apresentada e, portanto, nas equações que a caracterizam, foi assumido um modelo contínuo no tempo. No entanto, na realidade da monitorização de uma estrutura, os valores obtidos são sempre provenientes de uma amostragem com uma determinada frequência sobre um intervalo finito de tempo. Assim, e se partirmos da solução da equação de estado (2.35) conhecidas as condições iniciais dada por (Reynders, 2009):

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}c \cdot t} \cdot \underline{x}(0) + \int_0^t e^{\underline{A}c \cdot (t-\tau)} \cdot \underline{B}_c \cdot \underline{f}(\tau) \cdot d\tau \quad (2.52)$$

é possível escrever para um sistema discreto amostrado nos instantes  $t_k = k \cdot \Delta t$ , sendo  $k$  um número inteiro, o modelo de estado no instante  $k+1$ , assumindo valores constantes para a função amostrada entre cada dois instantes consecutivos, em função da resposta no instante  $k$ , como (Juang, 1994):

$$\begin{aligned}\underline{x}_{k+1} &= \underline{A} \cdot \underline{x}_k + \underline{B} \cdot \underline{f}_k \\ \underline{y}_k &= \underline{C} \cdot \underline{x}_k + \underline{D} \cdot \underline{f}_k\end{aligned}\quad (2.53)$$

em que o índice  $k$  indica o valor amostrado no instante  $k \cdot \Delta t$ . Estas matrizes relacionam-se com as suas homólogas da formulação de tempo contínuo por:

$$\begin{aligned}\underline{A} &= e^{\underline{A}_c \cdot \Delta t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\underline{A}_c \cdot \Delta t)^n}{n!}, & \underline{B} &= \underline{B}_c \cdot \int_0^{\Delta t} e^{\underline{A}_c \cdot \tau} \cdot \partial \tau \\ \underline{C} &= \underline{C}_c, & \underline{D} &= \underline{D}_c\end{aligned}\quad (2.54)$$

Se se tirar partido do desenvolvimento em série para a matriz de estado e da sua decomposição em valores e vetores próprios, obtém-se

$$\begin{aligned}\underline{A} &= e^{\underline{A}_c \cdot \Delta t} = e^{(\underline{\Psi} \cdot \underline{\Lambda}_c \cdot \underline{\Psi}^{-1}) \cdot \Delta t} = \underline{I} + (\underline{\Psi} \cdot \underline{\Lambda}_c \cdot \underline{\Psi}^{-1}) \cdot \Delta t + \frac{1}{2!} \cdot (\underline{\Psi} \cdot \underline{\Lambda}_c \cdot \underline{\Psi}^{-1}) \cdot (\underline{\Psi} \cdot \underline{\Lambda}_c \cdot \underline{\Psi}^{-1}) \cdot \Delta t^2 + \dots \\ &\dots = \underline{\Psi} \cdot \left( \underline{I} + \underline{\Lambda}_c \cdot \Delta t + \frac{1}{2!} \cdot (\underline{\Lambda}_c \cdot \Delta t)^2 + \dots \right) \cdot \underline{\Psi}^{-1} = \underline{\Psi} \cdot e^{\underline{\Lambda}_c \cdot \Delta t} \cdot \underline{\Psi}^{-1} = \underline{\Psi} \cdot \underline{\Lambda}_D \cdot \underline{\Psi}^{-1}\end{aligned}\quad (2.55)$$

A expressão acima apresentada mostra que a decomposição em vetores e valores próprios da matriz de estado de tempo discreto permite também caraterizar o sistema dinâmico em análise, já que os primeiros são idênticos aos obtidos na formulação contínua e os segundos, que se representarão por  $\mu_k$ , se relacionam com os  $\lambda_k$  através da expressão:

$$\mu_k = e^{\lambda_k \cdot \Delta t} \longrightarrow \lambda_k = \frac{\ln(\mu_k)}{\Delta t}\quad (2.56)$$

**Exemplo 2.4** – Para o modelo de estado já apresentado, foi calculada a matriz de estado de tempo discreto a partir das equações (2.54), considerando uma frequência de amostragem de 50 Hz ( $\Delta t = 0.02$  s). Decompondo esta nova matriz em vetores e valores próprios, confirmou-se a igualdade entre os primeiros e os já obtidos previamente, e obtiveram-se os seguintes valores para  $\mu_k$ , aos quais se aplicou a equação (2.56).

$$\text{diag}(\underline{\Lambda}_D) = \begin{bmatrix} -0.818 \pm 0.537 \cdot i \\ -0.709 \pm 0.679 \cdot i \\ -0.619 \pm 0.764 \cdot i \\ 0.115 \pm 0.986 \cdot i \\ 0.359 \pm 0.928 \cdot i \\ 0.487 \pm 0.869 \cdot i \\ 0.877 \pm 0.478 \cdot i \\ 0.964 \pm 0.264 \cdot i \\ 0.941 \pm 0.335 \cdot i \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{\ln(\text{diag}(\underline{\Lambda}_D))}{0.02} = \begin{bmatrix} -1.092 \pm 128.01 \cdot i \\ -0.944 \pm 118.89 \cdot i \\ -0.847 \pm 112.56 \cdot i \\ -0.363 \pm 72.73 \cdot i \\ -0.252 \pm 60.10 \cdot i \\ -0.200 \pm 53.01 \cdot i \\ -0.056 \pm 24.94 \cdot i \\ -0.034 \pm 17.10 \cdot i \\ -0.027 \pm 13.35 \cdot i \end{bmatrix}\quad (2.57)$$

Como se pode constatar, os valores obtidos na equação (2.57) são iguais aos da equação (2.45), pelo que se omite o cálculo das frequências e amortecimentos modais a partir destes.

### 2.3. EXCITAÇÃO ESTOCÁSTICA

Os conceitos até agora apresentados admitiam que a excitação que anima a estrutura é conhecida à partida. No entanto, no contexto de um ensaio de vibração ambiental, tal não acontece, medindo-se apenas a resposta originada na estrutura devido a ações tão aleatórias e desconhecidas como vento ou tráfego. Assim sendo, é necessário caraterizá-la através de conceitos probabilísticos, assumindo-se a excitação como uma realização de um processo estocástico. Esta abordagem encontra-se detalhada na referência (Cunha, 1990), mas será sucintamente caraterizada neste trabalho, sendo abordados os seus aspetos mais relevantes.

Como se define em (Magalhães, 2004), um processo estocástico corresponde ao conjunto tendencialmente infinito de funções aleatórias independentes (realizações) caraterizadoras de um determinado fenómeno. Para o efeito deste trabalho, considerar-se-á que estes processos são Gaussianos (o que é justificado pelo *Teorema do Limite Central* para um número suficientemente elevado de realizações) e com média nula. Assim sendo, as grandezas estatísticas relevantes que os definem são as apresentadas no Quadro 2.5, sendo que a designação  $X_{ik}$ , representa o valor da realização  $k$  do processo  $X$ , avaliada no instante  $i$ :

Quadro 2.5 – Grandezas estatísticas associadas a processos estocásticos

Grandeza Estatística	Expressão
Média no instante $t_i$	$m_{xi} = E[x(t_i)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n X_{ik}$
Variância no instante $t_i$	$\mu_{xi} = E[[x(t_i) - m_{xi}]^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (X_{ik} - m_{xi})^2$
Função de auto-correlação referida aos instantes $t_i$ e $t_j$	$R_x(t_i, t_j) = E[x(t_i) \cdot x(t_j)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n X_{ik} \cdot X_{jk}$
Função de auto-covariância referida aos instantes $t_i$ e $t_j$	$\begin{aligned} \mu_x(t_i, t_j) &= E[(x(t_i) - m_{xi}) \cdot (x(t_j) - m_{xj})] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (X_{ik} - m_{xi}) \cdot (X_{jk} - m_{xj}) \end{aligned}$

Como se assume uma média nula, a função de auto-covariância coincide com a de auto-correlação, assumindo-se desde já esta última designação no decorrer deste trabalho. Além disso, e de maneira a permitir o seu cálculo recorrendo a uma única realização, será assumido, como comumente é, que o processo é estacionário e ergódico, considerando-se portanto que as suas caraterísticas estatísticas são constantes ao longo do tempo e que o seu valor quando avaliado para todas as realizações num determinado instante temporal é igual ao valor obtido quando se tem em conta apenas uma realização ao longo do tempo. Assim sendo, a função de auto-correlação não depende dos instantes  $t_i$  e  $t_j$ , mas apenas do seu desfasamento temporal ( $\tau = t_j - t_i$ ), e pode ser avaliada por uma única realização através da expressão:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t + \tau) \cdot \partial t \quad (2.58)$$

Esta expressão pode ser generalizada para relacionar quaisquer dois fenómenos, passando a designar-se função de correlação cruzada, bastando para isso escrever:

$$R_{x_1 x_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) \cdot \partial t \quad (2.59)$$

Transportando esta expressão para o domínio da frequência, surgem então as funções de espectro cruzado ou auto-espectro (espectro de potência), conforme se considerem processos distintos ou não. Estando a função de correlação associada a uma convolução no domínio do tempo, então a expressão do espectro no domínio da frequência, surge na sua forma mais generalizada como o produto de duas transformadas de Fourier restringidas ao intervalo de observação  $[-T/2, T/2]$ , podendo ser escrita como:

$$S_{x_1 x_2}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{x_1 x_2}(\tau) \cdot e^{-i\omega \cdot \tau} \cdot \partial \tau = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \frac{F_{T,r}[x_1(t)]^* \cdot F_{T,r}[x_2(t)]}{T} \quad (2.60)$$

No caso de dois processos idealmente aleatórios, a função de correlação apenas assume ordenada não nula e infinita na origem, identificando-se assim com uma função do género impulsivo ( $\delta(\tau)$ ) de Dirac. Pelas propriedades da transformação de Fourier aplicada a funções impulsivas, a sua representação no domínio da frequência torna-se então um espectro constante de área infinita para estas mesmas ações. Naturalmente, no contexto dos ensaios de vibração ambiental, associar à excitação uma variância infinita não é realista, pelo que é prática corrente assumir que este fenómeno constitui um ruído branco de banda limitada, ou seja, que a o seu auto-espectro é constante para frequências contidas dentro de um determinado domínio, enquanto que a função de auto-correlação assume o valor da variância (finito) do processo na origem, sendo nula para as restantes abscissas.

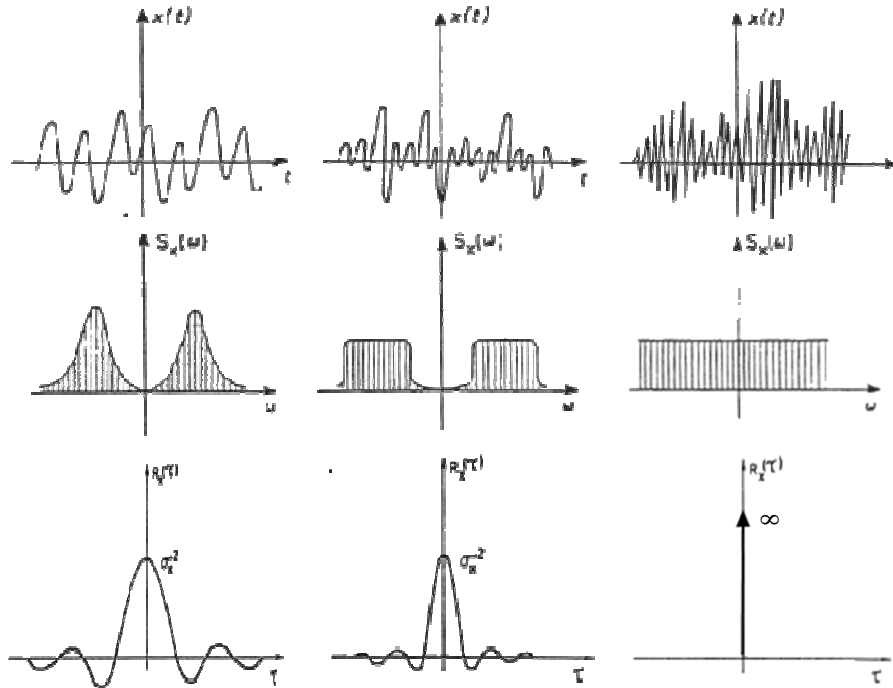


Figura 2.10 – Influência da irregularidade do processo nos espectros de potência e funções de auto-correlação



Se o problema em estudo for do tipo vetorial, os vários processos estocásticos que lhe estão associados podem ser agrupados num único vetor coluna  $\underline{y}(t)$  e as expressões até agora apresentadas dão lugar às suas equivalentes em formato matricial. A função de correlação/espectro é assim substituída por uma matriz de correlação/espectros, que contém na sua diagonal principal as funções de auto-correlação/auto-espectros das diferentes componentes do processo, e fora da diagonal principal correlações cruzadas/espectros cruzados. Se for novamente assumido que o processo em estudo é do tipo ruído branco, as matrizes das correlações e dos espectros podem ser escritas como:

$$\begin{cases} \underline{R}_y(\tau) = E [\underline{y}(t) \cdot \underline{y}(t + \tau)^T] = \underline{R}_y \cdot \delta(\tau) \\ \underline{S}_y(\omega) = \underline{R}_y \end{cases} \quad (2.61)$$

em que  $\underline{R}_y$  representa uma matriz constante.

Consequência interessante que pode ser deduzida dos conceitos apresentados, aplicados conjuntamente com a definição de função de resposta em frequência para sistemas de um grau de liberdade, consiste em utilizar estas últimas para relacionar os espectros da excitação com os da resposta, segundo as seguintes expressões (Maia and Silva, 1997):

$$\begin{cases} S_{u_1 u_1}(\omega) = |H_1(\omega)|^2 \cdot S_{p_1 p_1}(\omega) \\ S_{p_1 u_1}(\omega) = H_1(\omega) \cdot S_{p_1 p_1}(\omega) \\ S_{u_1 p_1}(\omega) = H_1^H(\omega) \cdot S_{p_1 p_1}(\omega) \end{cases} \quad (2.62)$$

Estas relações podem ser ainda generalizadas para sistemas de dimensão superior, podendo-se escrever, em função dos espectros da resposta e da excitação, a seguinte expressão, continuando a admitir uma ação do tipo ruído branco (Cunha, 1990):

$$\underline{S}_u(\omega) = \underline{H}(\omega) \cdot \underline{S}_p \cdot \underline{H}^H(\omega) = \underline{H}(\omega) \cdot \underline{R}_p \cdot \underline{H}^H(\omega) \quad (2.63)$$

em que  $\underline{R}_p$  é uma matriz constante. Se as diferentes solicitações forem ainda estatisticamente independentes, então esta matriz é diagonal e os seus termos não nulos coincidem com as variâncias dos diferentes processos, sendo possível escrevê-la tendo em conta a contribuição dos diferentes modos de vibração da estrutura através de:

$$\underline{S}_{a(b)}(\omega) = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{(\underline{\Phi}_{(a,k)} \cdot \underline{\Phi}_{(r,k)})/m_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2 \cdot i \cdot \xi_k \cdot \omega \cdot \omega_k} \cdot \underline{R}_{p(r,r)} \cdot \frac{(\underline{\Phi}_{(b,k)} \cdot \underline{\Phi}_{(r,k)})/m_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2 \cdot i \cdot \xi_k \cdot \omega \cdot \omega_k} \quad (2.64)$$

---

<sup>H</sup> transposta conjugada

**Exemplo 2.5** – Para o modelo que serve de base a esta exposição calculou-se a matriz dos espectros de resposta (acelerações), segundo a equação (2.63), assumindo a excitação nos diferentes graus de liberdade, estatisticamente independentes, um fenómeno aleatório de variância unitária (ou seja, a matriz  $\underline{S}_p$  é constante e igual à matriz identidade). De igual modo, foram calculadas as contribuições separadamente dos diferentes modos segundo a equação (2.64) e sobrepostas as diferentes funções obtidas num gráfico de amplitude. De seguida, apresenta-se na Figura 2.11 o resultado para o termo (1,1) da matriz dos espectros de resposta, bem como a contribuição do 1º, 4º e 7º modo, salientando-se que, para cada frequência natural da estrutura, esta é bem aproximada considerando apenas a contribuição do modo ressonante respetivo.

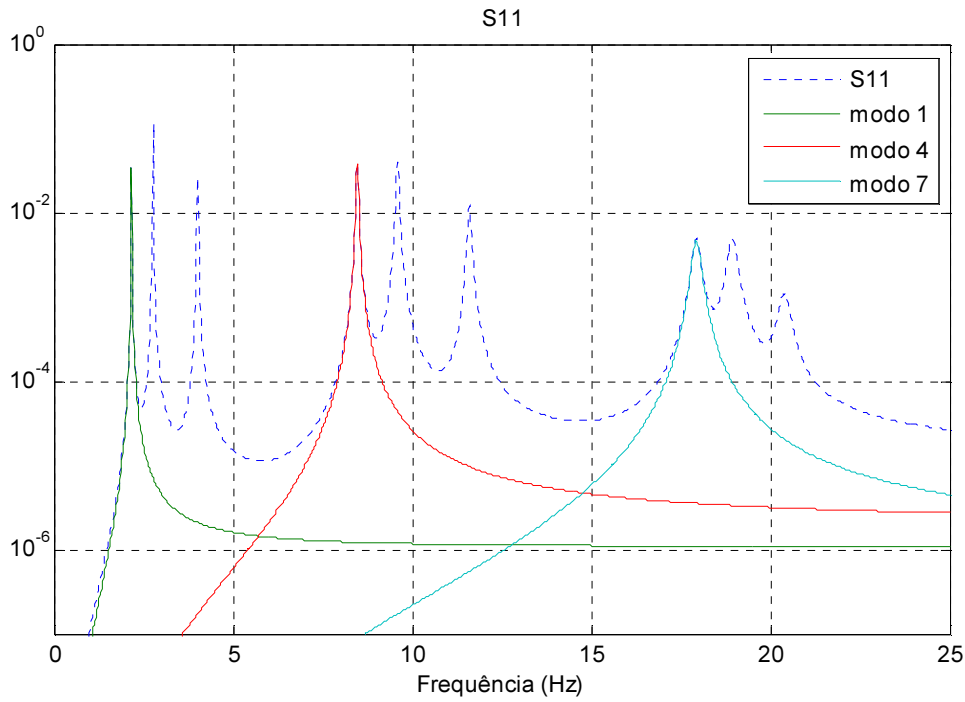


Figura 2.11 – Matriz dos espectros de resposta (em acelerações) S11

### Modelos de Estado

A extensão da análise estocástica aos modelos de estado discretos já apresentados pode ser conseguida, numa primeira abordagem, adicionando ao modelo componentes estocásticas ( $\underline{w}$  e  $\underline{v}$ ) que modelam o ruído, não mensurável, originado nas aproximações efetuadas na modelação e inclusive na própria cadeia de medição, e que se considera ser um ruído branco de média nula. No entanto, como no contexto de um ensaio de vibração ambiental a excitação que a anima a estrutura é desconhecida e assumida com as mesmas características destes, então os vetores que os representam podem ser associados a todas as incertezas do processo resultando um modelo de estado tal que:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \underline{A} \cdot \underline{x}_k + \underline{B} \cdot \underline{f}_k + \underline{w}_k \\ \underline{y}_k = \underline{C} \cdot \underline{x}_k + \underline{D} \cdot \underline{f}_k + \underline{v}_k \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \underline{A} \cdot \underline{x}_k + \underline{w}_k \\ \underline{y}_k = \underline{C} \cdot \underline{x}_k + \underline{v}_k \end{cases} \quad (2.65)$$

Devido às caraterísticas dos processos estocásticos  $\underline{w}$  e  $\underline{v}$  é possível escrever as relações de correlação entre ambos para quaisquer 2 instantes  $a$  e  $b$  da seguinte forma, tal como descrito em (Overschee and Moor, 1996):

$$E \left[ \begin{pmatrix} \underline{w}_a \\ \underline{v}_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{w}_b^T & \underline{v}_b^T \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \underline{Q} & \underline{S} \\ \underline{S}^T & \underline{R} \end{bmatrix} \cdot \delta_{ab} \quad (2.66)$$

em que  $\delta_{ab}$  representa o *delta de Kronecker*, que pode ser interpretado como uma versão discreta da função delta já apresentada, e definida como:

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases} \quad (2.67)$$

Assim, as matrizes definidas como  $\underline{Q}$  e  $\underline{R}$  têm as caraterísticas já apresentadas de uma matriz de correlação associada aos processos  $\underline{w}$  e  $\underline{v}$ , respetivamente, enquanto a matriz  $\underline{S}$  tem significado semelhante, mas está associada à correlação cruzada entre os processos. A multiplicação pelo delta de Kronecker definido segundo a equação (2.67) assegura que qualquer termo gerado apenas tem valor não nulo se os instantes de avaliação  $a$  e  $b$  coincidirem, caraterística de processos idealmente aleatórios, como também já foi visto.

De acordo com o que foi apresentado, o vetor de estado pode também ser representado por um processo estocástico, sendo a sua matriz de correlação dada, para um desfaseamento temporal nulo ( $\tau = 0$ ), por:

$$\underline{\Sigma} = E[\underline{x}_k \cdot \underline{x}_k^T] \quad (2.68)$$

Além disso, por este ser independente dos processos que simulam o ruído  $\underline{w}$  e  $\underline{v}$ , pode-se ainda escrever:

$$E[\underline{x}_k \cdot \underline{w}_k^T] = E[\underline{x}_k \cdot \underline{v}_k^T] = \underline{0} \quad (2.69)$$

Se se partir das expressões anteriores, pode-se então definir a matriz de correlação entre o vetor de estado no instante  $k+1$  e a resposta medida no instante  $k$  como:

$$\begin{aligned} \underline{G} &= E[\underline{x}_{k+1} \cdot \underline{y}_k^T] = E[(\underline{A} \cdot \underline{x}_k + \underline{w}_k) \cdot (\underline{C} \cdot \underline{x}_k + \underline{v}_k)^T] = E[(\underline{A} \cdot \underline{x}_k + \underline{w}_k) \cdot (\underline{x}_k^T \cdot \underline{C}^T + \underline{v}_k^T)] = \dots \\ &\dots = E[(\underline{A} \cdot \underline{x}_k \cdot \underline{x}_k^T \cdot \underline{C}^T) + (\underline{w}_k \cdot \underline{x}_k^T \cdot \underline{C}^T) + (\underline{A} \cdot \underline{x}_k \cdot \underline{v}_k^T) + (\underline{w}_k \cdot \underline{v}_k^T)] = \underline{A} \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{C}^T + \underline{S} \end{aligned} \quad (2.70)$$

A partir de processos análogos ao apresentado na expressão (2.70) é possível definir a matriz de correlações,  $\underline{R}_y(\tau = j \cdot \Delta t) = E[\underline{y}_{k+j} \cdot \underline{y}_k^T]$ , através de:

$$\begin{cases} \underline{R}_y(0) = \underline{C} \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{C}^T + \underline{R} \\ \underline{R}_y(j) = \underline{C} \cdot \underline{A}^{j-1} \cdot \underline{G} = \underline{R}_y(-j)^T \end{cases} \quad (2.71)$$

A segunda equação do sistema (2.71) será fundamental para basear os processos de identificação modal baseados em modelos de estado, já que permite, através da matriz das correlações da resposta (passível

de ser determinada experimentalmente) chegar à matriz de estado em tempo discreto, que, como já se viu, contém toda a informação necessária para caraterizar adequadamente o sistema em estudo.

## 3

## MÉTODOS ESTOCÁSTICOS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL

## 3.1. INTRODUÇÃO

Tendo sido apresentadas diferentes abordagens relativamente ao estudo de um problema dinâmico de uma estrutura, procura-se neste capítulo explicar como, a partir do conhecimento da resposta da mesma quando sujeita às variadas ações a que se encontra naturalmente exposta (tráfego, vento, entre outras) e que são à partida desconhecidas, é possível caraterizar o seu comportamento. Assim sendo, os métodos que se expõe baseiam-se na hipótese da excitação ser uma realização de um processo estocástico do tipo ruído branco como já apresentado no ponto 2.3. No entanto, para que esses métodos possam ser utilizados, é necessário tratar os dados de forma a estimar corretamente os espetros e/ou funções de correlação da resposta, pelo que também se apresentam sinteticamente maneiras de os obter, minimizando o erro.

**Exemplo 3.1.** – Para melhor ilustrar todos os procedimentos que vão sendo apresentados, simulou-se, em MATLAB, e partindo da formulação de estado discreta no tempo já exposta, a resposta da estrutura quando sujeita a uma ação, em cada grau de liberdade dinâmico considerado, constituída por uma série temporal de 10 minutos, frequência de amostragem de 50 Hz e seguindo uma distribuição normal reduzida (média nula e variância unitária). Assim, as matrizes de estado de tempo contínuo foram calculadas utilizando as equações já apresentadas (equações (2.36), (2.37), (2.42) e (2.43)) considerando que só se mediriam acelerações ( $\underline{C}_y = \underline{C}_d = 0$ ), tendo de seguida sido convertidas nas suas equivalentes de modelo discreto utilizando o comando *c2d* (“continuous to discret”). A excitação foi gerada através do comando *randn*, que permite formar uma série de valores retirados de uma distribuição normal com os parâmetros especificados. Tendo o modelo de estado e a ação sobre este caraterizada, o software permite simular a resposta da estrutura a partir da função *dlsim*, que fornece ainda o vetor de estado, se tal for pretendido<sup>1</sup>. Nas Figuras 3.1 e 3.2 apresentam-se os resultados obtidos para a excitação do grau de liberdade central (grau de liberdade 5), bem como para as respostas em aceleração dos graus de liberdade

<sup>1</sup> Se se pretender simular o ruído introduzido pela cadeia de medição, podem ser adicionados ao vetor das respostas obtidos vetores aleatórios com distribuição normal, média nula e variância proporcional à intensidade de ruído pretendida (segundo a referência (Juang, 1994), relações ruído-sinal na ordem de 0,1 são condizentes com ensaios realizados com bom equipamento, sendo este valor atualmente conservativo devido à melhoria dos equipamentos)

associados aos graus 1, 2 e 5 do modelo numérico já apresentado, quer no domínio do tempo, quer no da frequência:

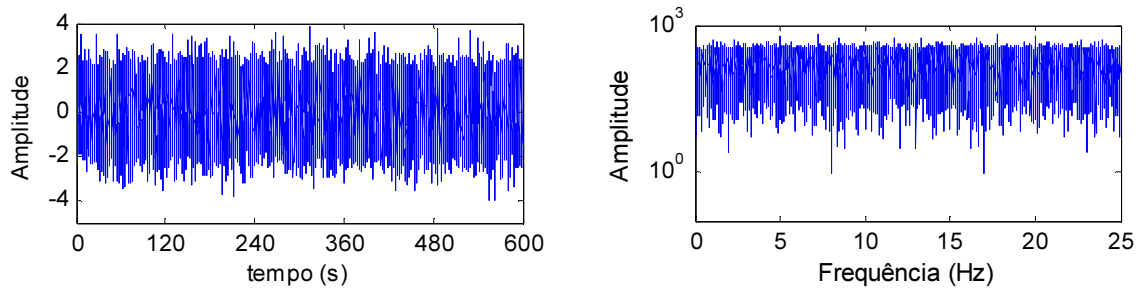


Figura 3.1 – Ação atuante sobre o 5º grau de liberdade (meio do vão central)

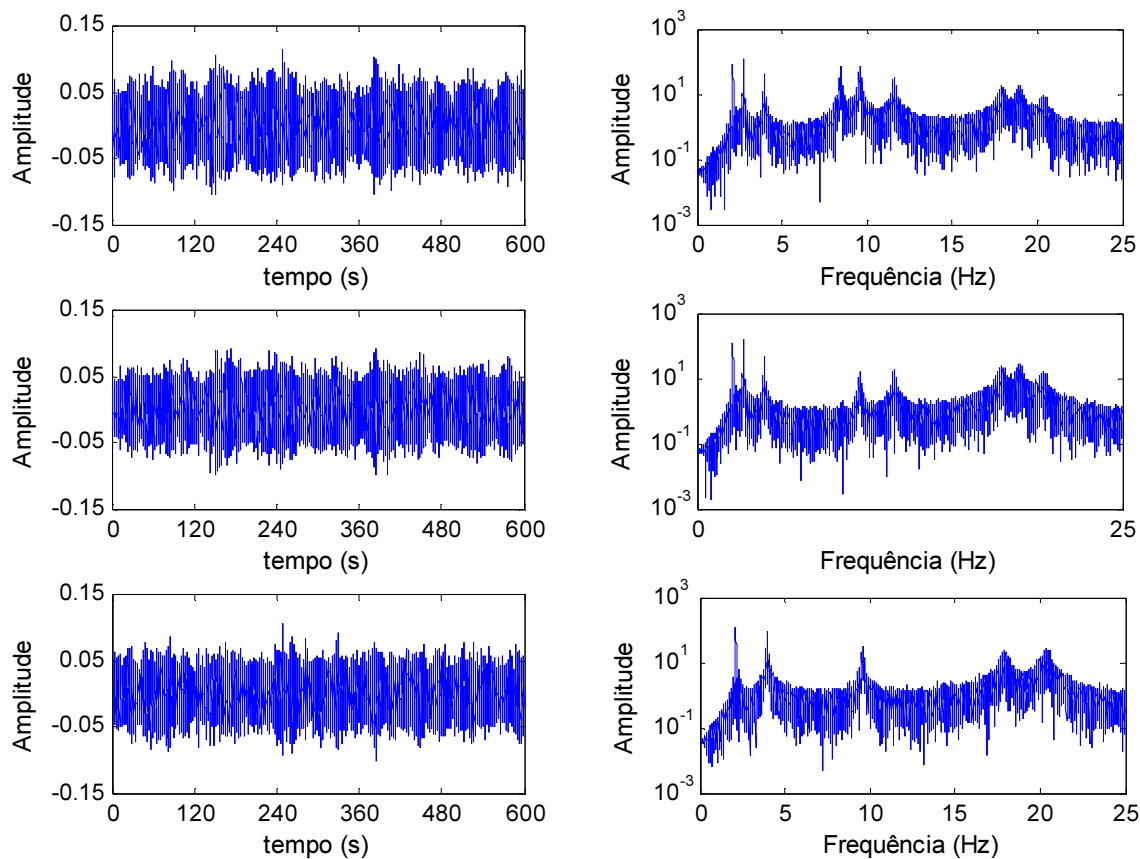


Figura 3.2 – Resposta simulada nos graus de liberdade 1, 2 e 5 (de cima para baixo)

Como se pode constatar da análise da Figura 3.1. a excitação fornecida encontra-se uniformemente distribuída ao longo das diferentes frequências em análise. Além disso, como se vê na figura 3.2., as respostas da estrutura apresentam picos em concordância com as frequências naturais da estrutura já identificadas. Note-se, no entanto, que nem todos os graus de liberdade identificam os 9 modos de vibração distintos visto encontrarem-se sobre um nodo desses mesmos modos, como já foi visto. Por fim, é de referir que se simularam mais séries temporais, quer relativas a “setups” em que não foram monitorizados todos os graus de liberdade, quer relativas ao modelo 2, que aqui não se apresentam mas que serão utilizadas para ilustrar determinados detalhes dos métodos abordados.

### 3.2. ESTIMATIVA DAS FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO E ESPETROS DA RESPOSTA

#### 3.2.1. ESPETROS DE RESPOSTA

De acordo com o que já foi apresentado sobre processos estocásticos, a função densidade espectral pode ser obtida tirando partido das transformadas de Fourier dos processos a relacionar  $x_1$  e  $x_2$ . No entanto, a realidade de um ensaio realizado sobre uma determinada estrutura, só permite a caraterização de uma única realização de cada processo, com uma determinada frequência de amostragem e duração, podendo uma estimativa do espectro ser obtida por:

$$\hat{S}_{x_1 x_2}(\omega) = \frac{X_1(\omega)^* \cdot X_2(\omega)}{N \cdot \Delta t} \quad (3.1)$$

em que as transformadas  $X(\omega)$  são agora discretas e o denominador representa o período de tempo amostrado, sendo  $N$  o número total de pontos adquiridos. Como se pode encontrar na referência (Caetano, 1992), a limitação temporal da série analisada traduz-se num erro de “leakage” (distribuição da energia de uma determinada frequência pela sua vizinhança), enquanto que a sua discretização associa conteúdo energético proveniente de frequências superiores à frequência de Nyquist (metade da frequência amostrada) em frequências inferiores a esta – erro de “aliasing”. Assim, para um sinal amostrado com  $N$  pontos, após a sua transposição para o domínio da frequência, apenas os  $N/2$  primeiros pontos serão representativos, enquanto os restantes espelharão estes tendo como eixo de simetria a frequência  $f_{Nyquist} = 1/(2 \cdot \Delta t)$  (para eliminar o contributo de frequências superiores a esta, e portanto evitar este erro, é possível aplicar filtros passa-baixo de vários tipos).

Como consequência imediata e inevitável do acima exposto, as estimativas calculadas pela equação (3.1) apresentam erros grosseiros, que, no entanto, podem ser minimizados recorrendo a determinadas técnicas de tratamento de sinais. Uma maneira interessante de diminuir o ruído associado à função de densidade espectral, passa por dividir o segmento amostrado em troços mais curtos (normalmente cuja dimensão é uma potência de 2, de modo a facilitar a aplicação do algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT)), calcular segundo a equação (3.1) a estimativa correspondente a cada um desses segmentos e, por fim, realizar a média das mesmas, conseguindo assim, reduzir a variância do resultado final. O jogo de equilíbrio passa por procurar o número de pontos a utilizar em cada segmento, já que:

- um número baixo de pontos por segmento ( $N_a$ ) permite a realização de mais médias, tornando o espectro mais limpo, mas diminui a resolução em frequência, já que  $\Delta f = 1/T_a = 1/(N_a \cdot \Delta t)$
- um número elevado pontos por segmento conduz a menos segmentos e, portanto, menos médias realizadas (menor efeito sobre a diminuição do ruído) mas maior resolução em frequência

Uma maneira de aumentar o número de segmentos utilizáveis para um determinado número de pontos, passa por considerar alguma sobreposição (“overlapping”) entre eles. Além disso, um procedimento que, conjuntamente com o “overlapping”, conduz a bons resultados na atenuação dos erros, é a adoção de janelas de observação para os diferentes segmentos. Para definir o conceito de janela de observação, pode ser útil partir primeiro da janela retangular, em que a subdivisão de cada realização em segmentos mais curtos, não é mais do que efetuar o produto da amostra total por uma função retangular, definida, para o período de observação de cada amostra  $T_a$  como

$$w(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_a/2 \\ 0, & |t| > T_a/2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Desta definição, é possível generalizar a forma das janelas adotadas a outras que não a retangular, devendo no entanto, as ordenadas do sinal obtido ser seguidamente divididas pela soma dos quadrados das ordenadas da janela a dividir pela sua dimensão (número de ordenadas), de modo a preservar o conteúdo energético inicial do mesmo. Neste trabalho, optou-se pela utilização da janela de Hanning<sup>2</sup>, correntemente utilizada em ensaios de vibração ambiental, definida como:

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_a}\right) \right], & |t| < T_a/2 \\ 0, & |t| > T_a/2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Assim, do sinal amostrado passa-se para os segmentos mais curtos da seguinte forma (Figura 3.3):

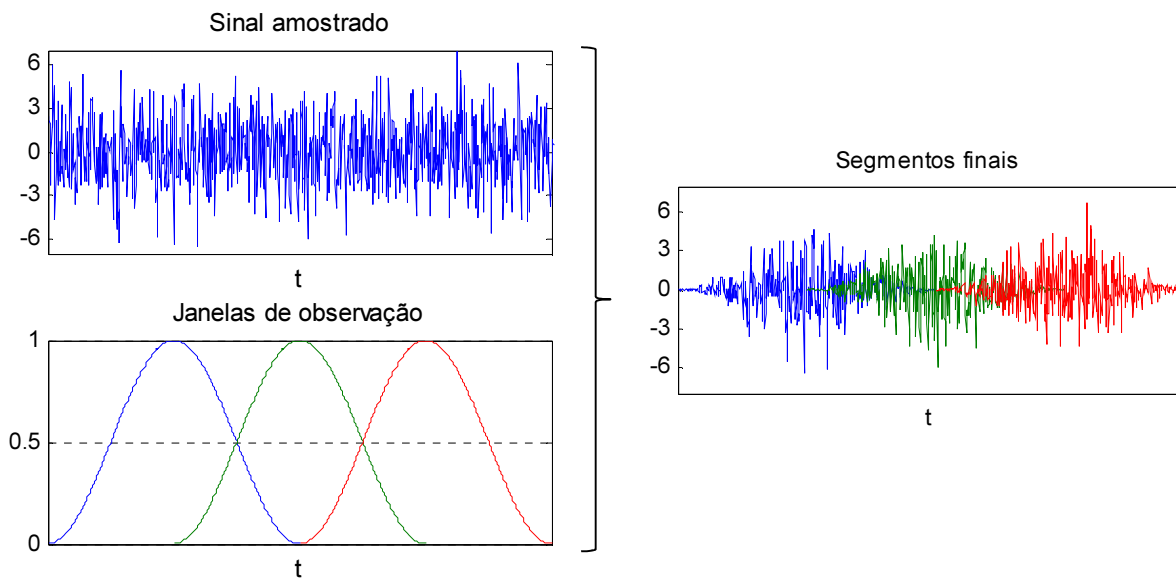


Figura 3.3 – Exemplo da aplicação de janelas de Hanning a um sinal amostrado

Se o problema em estudo for de natureza vetorial, o que sucede com os ensaios de vibração ambiental já que se mede a resposta em diversos pontos da estrutura, então é possível, como já foi visto, organizar os espetros numa matriz de maneira a que os termos da diagonal principal sejam auto-espetros e fora desta espetros cruzados, dando a equação (3.1) lugar a:

$$\hat{\underline{S}}_y(\omega) = \frac{\underline{Y}(\omega)^* \cdot \underline{Y}(\omega)^T}{N \cdot \Delta t} \quad (3.4)$$

em que  $\underline{Y}(\omega)$  é um vetor coluna com a FFT das respostas e origina, portanto, uma matriz de espetros com dimensão igual ao número de graus de liberdade instrumentados. Neste ponto, é importante referir

<sup>2</sup> A utilização da janela de Hanning com um “overlapping” de 50% tem a particularidade de originar uma reta nas zonas de sobreposição, permitindo assim que todos os elementos contribuam igualmente para o resultado final



que no decorrer de um ensaio, são realizados vários “setups” (associados a diferentes combinações do posicionamento dos  $l$  sensores disponíveis), sendo necessário que alguns graus de liberdade sejam continuamente avaliados de maneira a permitir relacionar as diferentes medições – graus de liberdade de referência. Assim sendo, apenas é possível determinar completamente as colunas associadas a estes graus de liberdade, em detrimento da matriz quadrada apresentada na equação (3.4), através de

$$\hat{\underline{S}}_y^{ref}(\omega) = \frac{\underline{Y}(\omega)^* \cdot \underline{Y}^{ref}(\omega)^T}{N \cdot \Delta t} \quad (3.5)$$

em que  $\underline{Y}^{ref}(\omega)$  representa um vetor coluna com as FFT dos  $r$  graus de liberdade instrumentados em todos os “setups”.

Um último cuidado a ter, no caso de se pretender determinar a função de correlação através dos espectros das respostas, como se verá de seguida, consiste em acrescentar a cada segmento de dimensão  $N_a$  uma extensão de zeros da mesma dimensão (o que não altera o resultado obtido para a FFT, mas é fundamental para uma correta obtenção das funções de correlação), sendo que neste caso não se deve aplicar as janelas de observação, atrás explicitadas ou outras.

**Exemplo 3.2.** – A partir das séries temporais de resposta simuladas, foram estimadas as matrizes dos espectros a partir da equação (3.4) e comparados os resultados alcançados com o valor teórico obtido pela equação (2.63) considerando para matriz dos espectros de excitação a matriz identidade (variância dos diferentes processos unitária).

As séries, geradas com uma frequência de 50 Hz durante 10 minutos, foram divididas em troços, tendo as estimativas sido efetuadas para diferentes divisões da série temporal das acelerações, com um “overlapping” de 50%, como se apresenta no Quadro 3.1:

Quadro 3.1 – Valores caraterísticos para as diferentes estimativas efetuadas

Estimativa	$N_a$	$T_a$ (s)	$\Delta f$ (Hz)
1	512	10.24	0.0977
2	1024	20.48	0.0488
3	2048	40.96	0.0244
4	4096	81.92	0.0122

Como se pode constatar, à medida que o número de pontos por segmento aumenta, a resolução em frequência também aumenta. Na Figura 3.4 apresentam-se os resultados obtidos para o primeiro termo da diagonal principal da matriz dos espectros de resposta, onde se pode ver que o ruído associado à estimativa também é superior à medida que a dimensão de cada segmento aumenta (aos segmentos obtidos foram aplicadas janelas de Hanning, tal como se encontra definida na equação (3.3)).

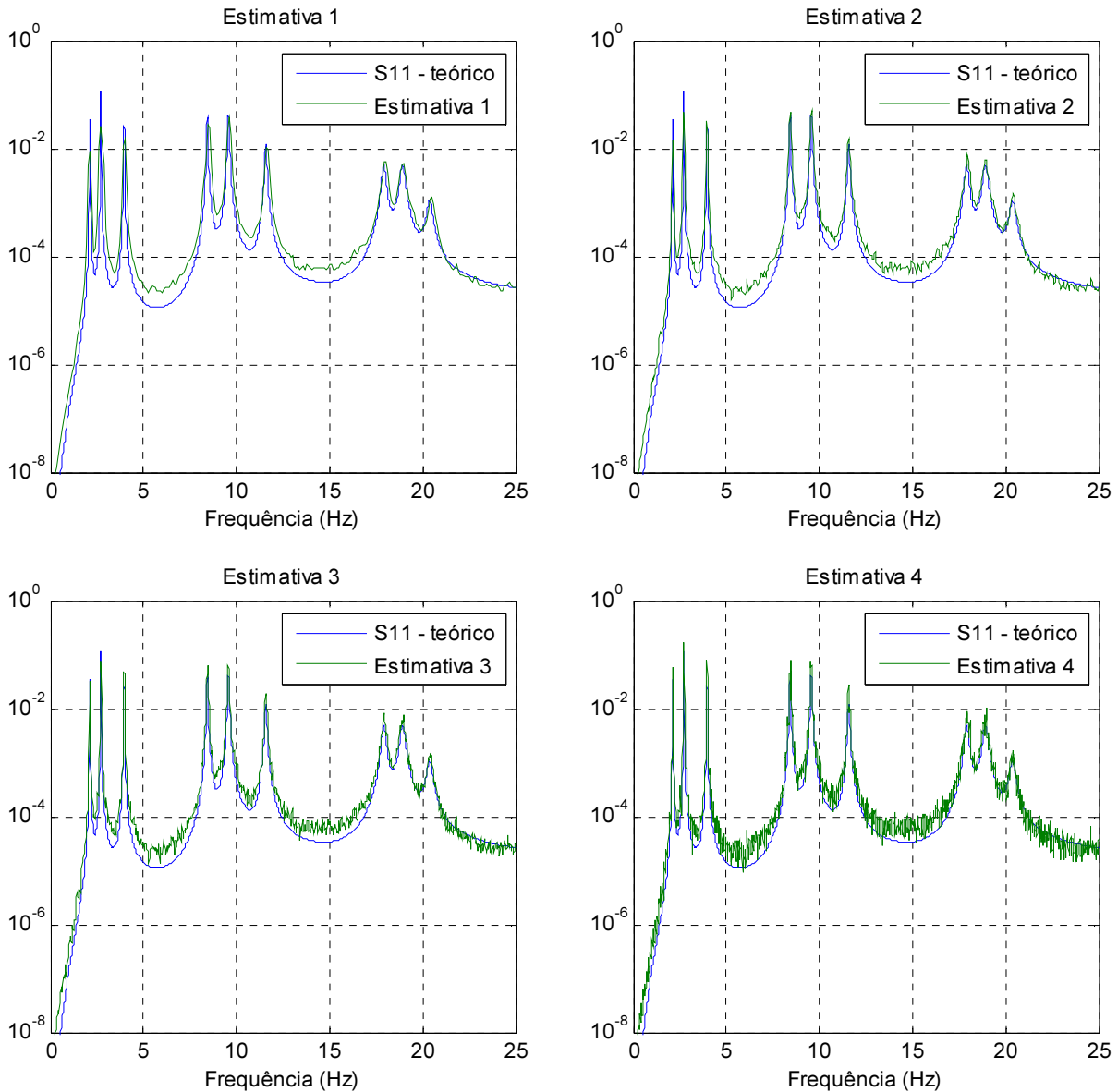


Figura 3.4 – Diferentes estimativas e respetiva sobreposição com o resultado teórico

### 3.2.2. FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO

As funções de correlação são o ponto de partida dos métodos de identificação que utilizam informação no domínio do tempo, sendo portanto de grande importância uma estimativa das mesmas o mais correta possível. Com esse propósito, são de seguida apresentados dois métodos distintos que o permitem realizar, bem como a sua organização em matrizes de blocos, útil para a explicação de alguns métodos.

Como já foi visto no Capítulo 2, esta função para quaisquer dois fenómenos representados pelos sinais contínuos  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  pode ser escrita como

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) \cdot \partial t \quad (3.6)$$

No entanto, e devido ao caráter finito e discreto das séries amostradas, o cálculo exato da expressão (3.6) não é possível, surgindo então a necessidade de estimar a mesma.

#### Estimativa direta

O processo mais intuitivo, passa por avaliar a expressão (3.6), assumindo que os sinais são conhecidos em instantes  $t_k = k \cdot \Delta t$ , como um somatório finito estendido a  $N$  termos. Assim, sendo  $j$  o desfaseamento temporal para o qual esta vai ser avaliada, surge a estimativa da função de correlação:

$$\hat{R}_{x_1 x_2}(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_1(k \cdot \Delta t) \cdot x_2(k \cdot \Delta t + j \cdot \Delta t) \quad (3.7)$$

No entanto, e como o processo é finito, o número de pontos que podem ser avaliados para um determinado instante temporal diminui à medida que  $j$  aumenta, dando origem a uma estimativa enviesada. Para ultrapassar este erro, é possível, quando se pretende avaliar a função de correlação até ao instante  $j_i \cdot \Delta t$ , utilizar apenas os primeiros  $N$  pontos de maneira a que  $N_{total} - j_i > N$ , sendo  $N_{total}$  o número total de pontos da série temporal. Outra hipótese para corrigir o erro de viés passa por calcular a expressão (3.6) de forma não enviesada tal que:

$$\hat{R}_{x_1 x_2}(j) = \frac{1}{N-j} \sum_{k=1}^N x_1(k \cdot \Delta t) \cdot x_2(k \cdot \Delta t + j \cdot \Delta t) \quad (3.8)$$

Evidentemente, a equação (3.7), no contexto de um ensaio de vibração ambiental, associadas a diferentes graus de liberdade, podem ser agrupadas numa única matriz de correlações como definido em 2.3. Neste caso, e associando o índice *ref* aos graus de liberdade instrumentados em todos os “setups” à semelhança do que foi efetuado nas estimativas dos espectros, resulta:

$$\hat{\underline{R}}_y^{ref}(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \underline{y}(k \cdot \Delta t) \cdot \underline{y}^{ref}(k \cdot \Delta t + j \cdot \Delta t)^T \quad (3.9)$$

Uma organização que se tornará útil para a descrição do método da identificação estocástica em sub-espacos a partir de correlações (Peeters, 2000) passa por dispor as matrizes de correlação numa matriz de blocos de Toeplitz<sup>3</sup> (um processo eficiente para a sua criação pode ser encontrado na referência (Magalhães and Cunha, 2011)):

$$\underline{T}_{(1|j_i)}^{ref} = \underline{Y}_f \cdot (\underline{Y}_p^{ref})^T = \begin{bmatrix} \underline{R}_{j_i}^{ref} & \underline{R}_{j_i-1}^{ref} & \dots & \underline{R}_1^{ref} \\ \underline{R}_{j_i+1}^{ref} & \underline{R}_{j_i}^{ref} & \dots & \underline{R}_2^{ref} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{R}_{2 \cdot j_i-1}^{ref} & \underline{R}_{2 \cdot j_i-2}^{ref} & \dots & \underline{R}_{j_i}^{ref} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

<sup>3</sup> Uma matriz de Toeplitz contém o mesmo elemento ao longo das suas diagonais

em que por simplificação o índice das matrizes indica o desfasamento temporal para o qual foram avaliadas. Na equação (3.10), os termos presentes no produto da primeira igualdade têm origem na disposição das séries temporais associadas aos graus de liberdade instrumentados segundo uma matriz de Hankel<sup>4</sup>, tal que:

$$\underline{H}^{ref} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_p^{ref} \\ \underline{Y}_f \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \begin{bmatrix} \underline{y}_0^{ref} & \underline{y}_1^{ref} & \cdots & \underline{y}_{N-1}^{ref} \\ \underline{y}_1^{ref} & \underline{y}_2^{ref} & \cdots & \underline{y}_N^{ref} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{y}_{j_i-1}^{ref} & \underline{y}_{j_i}^{ref} & \cdots & \underline{y}_{j_i+N-2}^{ref} \\ \underline{y}_{j_i} & \underline{y}_{j_i+1} & \cdots & \underline{y}_{j_i+N-1} \\ \underline{y}_{j_i+1} & \underline{y}_{j_i+2} & \cdots & \underline{y}_{j_i+N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{y}_{2 \cdot j_i-1} & \underline{y}_{2 \cdot j_i} & \cdots & \underline{y}_{2 \cdot j_i+N-2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

#### Estimativa das funções de correlação através da FFT

Uma forma alternativa de calcular as funções de correlação, numericamente mais eficiente e, portanto, mais rápida, passa por tirar partido dos espectros calculados segundo o procedimento apresentado em 3.2.1., aplicando a FFT inversa (IFFT) aos mesmos. Para este método é fundamental o artifício matemático já exposto que consiste em adicionar zeros a cada amostra em número igual à sua dimensão. De facto, como a função obtida por aplicação da IFFT é a soma da função da correlação com a sua simétrica, se tal passo fosse omitido não seria possível separar as duas últimas. Esquemáticamente resulta então a Figura 3.5:

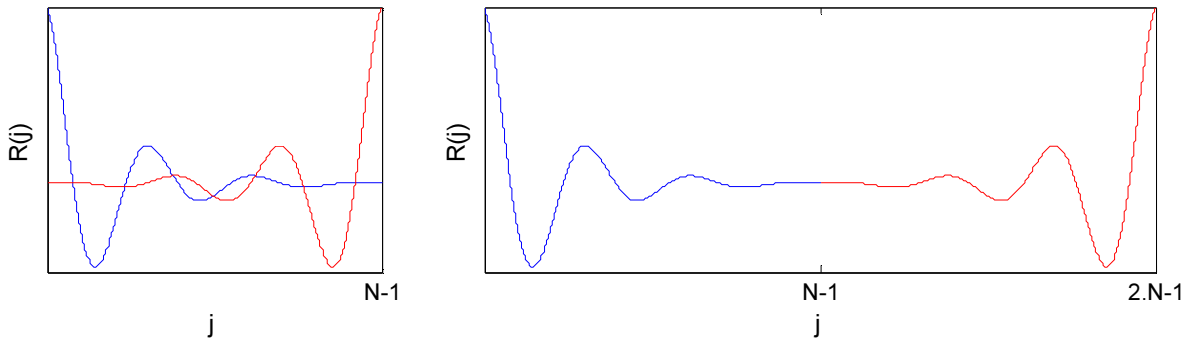


Figura 3.5 – Função de correlação (sem e com adição de zeros à série temporal)  
(adaptado de (Bendat and Piersol, 2000))

Como se torna evidente pela análise da figura 3.5., este erro, para um determinado valor de  $N$ , tem tanto maior impacto, quanto mais tarde a função de correlação se anular. De facto, se esta atingir o zero, ou

<sup>4</sup> Uma matriz de Hankel contém o mesmo elemento ao longo das suas anti-diagonais

valores residuais, até à abcissa  $N/2$ , a adição da sua simétrica tem um efeito desprezável já que se encontram naturalmente separadas<sup>5</sup>. No entanto, as funções assim obtidas surgem em ambos os casos afetadas de um erro de viés, fruto do algoritmo da FFT assumir uma periodicidade da resposta que, em geral, não existe (Rodrigues, 2004). Para corrigir este erro pode-se aplicar a relação existente entre as equações (3.7) e (3.8), que não é mais do que dividir cada ponto da estimativa enviesada por uma janela triangular  $(N - j)/N$ . Evidentemente, se apenas forem interessados os primeiros termos da função, este erro tem pouco significado, sendo eventualmente desnecessária tal correção.

### 3.3. MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL

Neste trabalho, e tendo em conta os vários métodos de identificação modal existentes, só se explorarão três, que se consideraram representativos, podendo outras abordagens ser encontradas nas referências (Magalhães and Cunha, 2011, Peeters and De Roeck, 2001, Reynders, 2012).

#### 3.3.1. MÉTODO DA SELEÇÃO DE PICOS – “PEAK-PICKING” (PP)

Como já foi visto, no caso de a excitação ser do tipo ruído branco, então, partindo da matriz das funções de resposta em frequência, é possível obter a matriz dos espectros da resposta a partir da equação:

$$\underline{S}_y(\omega) = \underline{H}(\omega) \cdot \underline{R}_f \cdot \underline{H}^H(\omega) \quad (3.12)$$

Como também já foi explicitado, as FRF, e, portanto, também a matriz dos espectros de resposta, apresentam máximos locais para valores próximos das frequências naturais da estrutura, de acordo com a relação  $\omega_{ak} = \omega_k \cdot \sqrt{1 - \xi_k^2}$ . De modo a identificar todos os valores ressonantes, poderá no entanto não ser suficiente analisar apenas um dos termos da diagonal principal da matriz dos espectros – espectros de potência – já que este pode estar relacionado com um grau de liberdade situado sobre um nodo de vibração em, pelo menos, um dos modos, tornando-o invisível. Uma prática corrente, apresentada na referência (Felber, 1993), consiste em calcular um espectro médio normalizado (normalizado para atender a eventuais flutuações da intensidade da excitação entre os vários “setups”), definido por:

$$ANPSD = \frac{1}{l} \cdot \sum_{j=1}^l NPSD_j(\omega), \quad NPSD_j = \frac{PSD_j}{\sum_{k=1}^N PSD_j(\omega_k)} \quad (3.13)$$

em que as estimativas dos espectros de potência são designados por  $PSD$ ,  $l$  é o número de “setups” realizados e  $N$  o número de ordenadas de cada estimativa.

---

<sup>5</sup> Como se verá mais à frente, a função de auto-correlação da resposta de um oscilador de um grau de liberdade sujeito a uma ação aleatória do tipo de ruído branco é proporcional à sua resposta em vibração livre (Brincker [et al.], 2001), sendo portanto este erro mais significativo quanto menor a frequência e o amortecimento do mesmo.

**Exemplo 3.3.** – Para ilustrar a pertinência da normalização dos espectros, calcularam-se para o modelo 1 em estudo, os espectros de potência com as características da estimativa 2 apresentada no exemplo 3.2., associados a diferentes intensidades da excitação, associados ao 1º grau de liberdade (com desvio padrão da amostra unitário) e ao 5º (com desvio padrão igual a 25) apresentados na Figura 3.6:

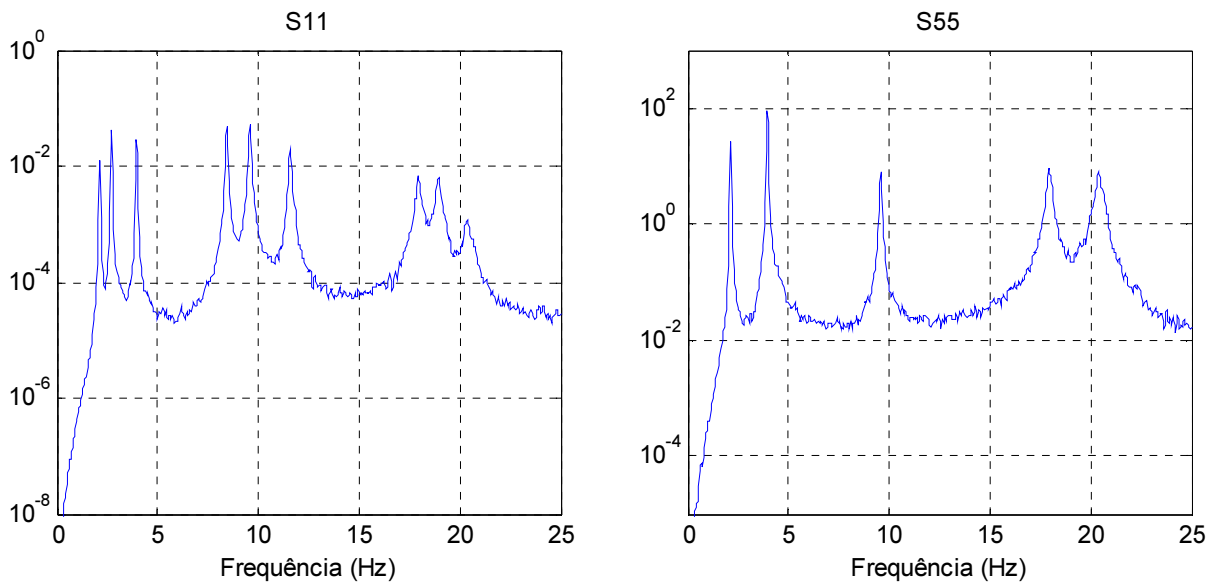


Figura 3.6 – Auto-espectros associados ao 1º (esquerda) e 5º (direita) graus de liberdade.

Como se pode ver, o espectro de potência associado ao grau de liberdade situado sobre o eixo de simetria da ponte é incapaz de revelar vários modos de vibração. Se associarmos a este facto uma excitação mais intensa, esses modos poderiam continuar invisíveis se fosse realizada uma média simples dos auto-espectros, em detrimento da formulação apresentada na equação (3.13), como se pode ver na Figura 3.7:

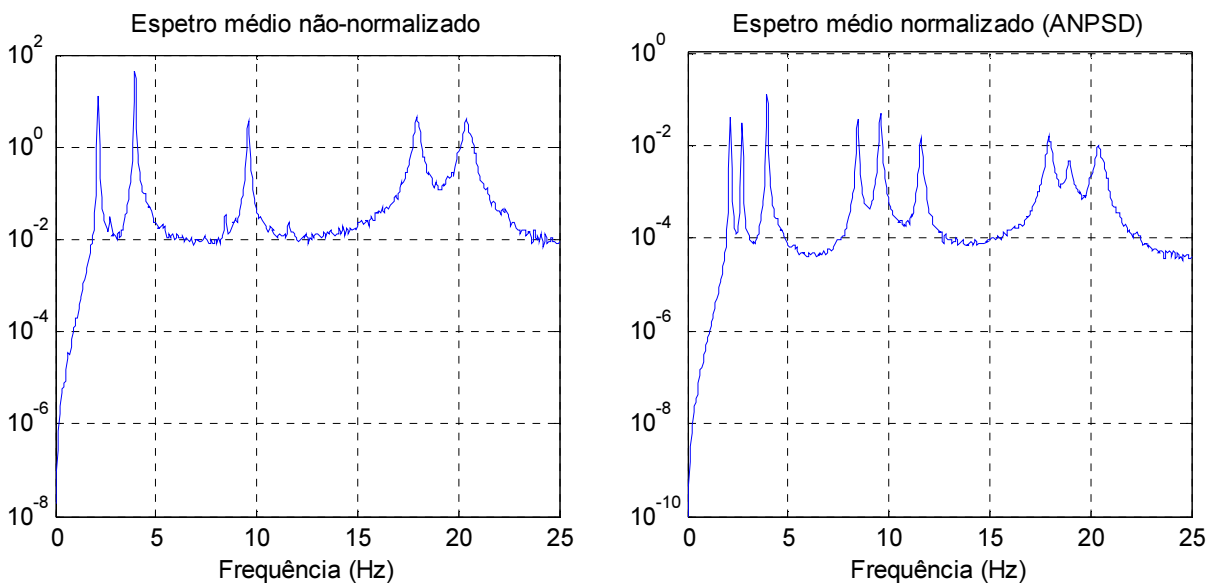


Figura 3.7 – Efeitos da normalização no cálculo do espectro médio

Da análise do ANPSD estendido a todos os espectros de potência, obtiveram-se os seguintes valores para as frequências da estrutura, que são comparadas com os valores teóricos já obtidos (Quadro 3.2.).

Quadro 3.2 – Comparação entre os resultados teóricos e obtidos do ANPSD

Modo	Frequência teórica (Hz)	Frequência identificada (Hz)	Erro (%)
1	2.1242	2.153	1.356
2	2.7213	2.740	0.687
3	3.9691	3.963	0.154
4	8.4376	8.464	0.313
5	9.5652	9.589	0.249
6	11.5756	11.595	0.168
7	17.9148	17.955	0.224
8	18.9221	18.934	0.063
9	20.3735	20.401	0.135

Além disso, e procurando ilustrar a dificuldade em aplicar este método a estruturas cujas frequências naturais não estejam adequadamente espaçadas, calculou-se o ANPSD para o modelo com rigidez alterada já apresentado (Figura 3.8):

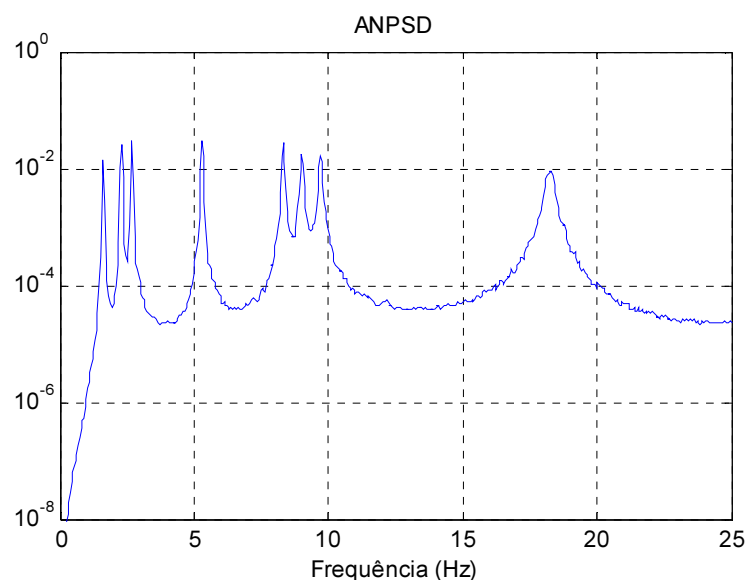


Figura 3.8 – ANPSD para o modelo 2

Como é possível observar, os dois últimos modos (com frequências de 18.19 Hz e 18.21 Hz) não são passíveis de ser identificados por esta abordagem, fundindo-se num único pico.

### Modos de vibração

Como já se viu quando a formulação modal foi introduzida, a matriz das FRF pode ser escrita pré-multiplicando e multiplicando uma matriz diagonal, cujos termos não nulos coincidem com as funções de transferência no espaço modal, pela matriz modal.

$$\underline{H}(\omega) = \underline{\Phi} \cdot \underline{H}_m(\omega) \cdot \underline{\Phi}^T \quad (3.14)$$

Como também foi constatado na altura, para um determinado modo de vibração, a FRF no espaço modal que lhe está associada assume valores muito superiores às restantes, tornando possível escrever

$$\underline{H}(\omega_k) = \underline{\Phi} \cdot \underline{H}_m(\omega_k) \cdot \underline{\Phi}^T \approx \underline{\phi}_k \cdot H_{km}(\omega_k) \cdot \underline{\phi}_k^T \quad (3.15)$$

Tendo em conta a equação (3.15), que pode ser avaliada como o produto do modo  $k$  pelo seu transposto e por uma constante complexa que resulta da avaliação da FRF desse mesmo modo na frequência ressonante, facilmente se conclui que a matriz dos espetros de resposta pode ser aproximada por:

$$\begin{aligned} \underline{S}_y(\omega_k) &= \underline{H}(\omega_k) \cdot \underline{R}_f \cdot \underline{H}^H(\omega_k) \approx (\underline{\phi}_k \cdot H_{km}(\omega_k) \cdot \underline{\phi}_k^T) \cdot \underline{R}_f \cdot (\underline{\phi}_k \cdot H_{km}(\omega_k) \cdot \underline{\phi}_k^T)^H = \\ &= (\underline{\phi}_k \cdot H_{km}(\omega_k) \cdot \underline{\phi}_k^T) \cdot \underline{R}_f \cdot (\underline{\phi}_k \cdot H_{km}(\omega_k)^* \cdot \underline{\phi}_k^T) = c_1 \cdot \underline{\phi}_k \cdot c_2 \cdot c_1^* \cdot \underline{\phi}_k^T = c_3 \cdot \underline{\phi}_k \cdot \underline{\phi}_k^T \end{aligned} \quad (3.16)$$

em que os valores representados por  $c$  acoplados de um determinado índice representam diferentes números complexos cujo valor não é relevante conhecer. Partindo da expressão obtida na equação (3.16), é possível, para as colunas completas da matriz  $\underline{S}_y(\omega)$ , ou seja, para as colunas associadas aos graus de liberdade de referência, estimar a relação entre o termo da diagonal principal e qualquer outro termo dessas mesmas colunas através da designada função de transferência entre o ponto  $j$  e o ponto  $ref$  (sensor de referência), definida da seguinte forma:

$$T_{(j,ref)} = \frac{S_{y(j,ref)}(\omega)}{S_{y(ref,ref)}(\omega)} \quad (3.17)$$

que, quando avaliada para uma frequência natural da estrutura  $\omega_k$ , resulta em:

$$\frac{S_{y(j,ref)}(\omega_k)}{S_{y(ref,ref)}(\omega_k)} \approx \frac{c_3 \cdot \underline{\Phi}_{(j,ref)} \cdot \underline{\Phi}_{(ref,ref)}}{c_3 \cdot \underline{\Phi}_{(ref,ref)} \cdot \underline{\Phi}_{(ref,ref)}} = \frac{\underline{\Phi}_{(j,ref)}}{\underline{\Phi}_{(ref,ref)}} \quad (3.18)$$

Pela análise da expressão anterior, constata-se que esta permite definir a relação entre quaisquer dois pontos do modo de vibração, obtendo-se assim a configuração que lhe está associada. No entanto, como os espetros cruzados são números complexos, então a estimativa do quociente expresso na equação (3.18) também o será, estando a sua amplitude relacionada com a amplitude do modo e a fase, no caso de apenas existirem modos reais, tomará o valor de  $0 \text{ rad}$  quando o deslocamento se dá no mesmo sentido ou de  $\pi \text{ rad}$  se ocorrer em sentidos contrários.



**Exemplo 3.4** – Para este exemplo, e sendo necessário assumir um grau de liberdade como referência, optou-se por seleccionar o primeiro grau de liberdade (note-se que os pontos de meio vão não seriam adequados para o efeito visto serem nodos de alguns dos modos). Devido ao número elevado de funções de transferência a avaliar, apresenta-se na Figura 3.9 apenas os gráficos (amplitude e fase), referentes ao segundo e terceiro graus de liberdade (visto que o primeiro consiste evidentemente num valor constante e unitário, por ser a referência), resumindo-se de seguida os valores das restantes, quando avaliadas nas frequências ressonantes identificadas e normalizados para norma unitária, no Quadro 3.3 e 3.4:

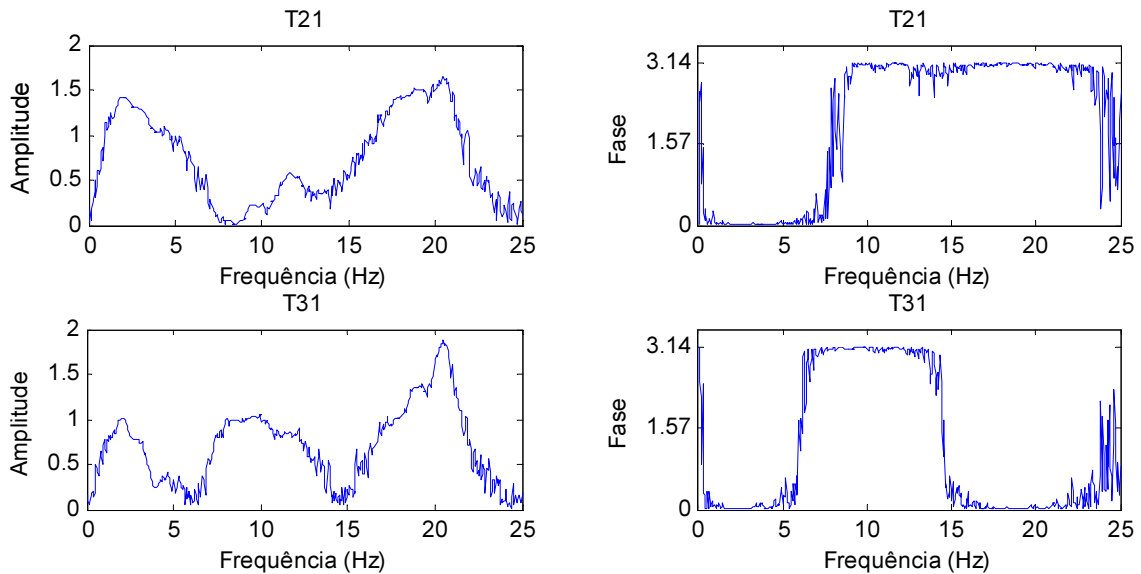


Figura 3.9 – Funções de transferência para os graus de liberdade 2 e 3 (amplitude e fase)

Quadro 3.3 – Amplitude normalizada da função de transferência avaliada nas diferentes frequências

Modo $j$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.289	0.386	0.293	0.411	0.475	0.307	0.288	0.311	0.176
2	0.408	0.504	0.303	0.000	0.106	0.174	0.410	0.476	0.280
3	0.288	0.301	0.074	0.409	0.491	0.257	0.284	0.429	0.314
4	0.289	0.087	0.367	0.408	0.071	0.558	0.293	0.121	0.443
5	0.409	0.003	0.606	0.001	0.212	0.003	0.409	0.010	0.496
6	0.289	0.084	0.367	0.407	0.018	0.557	0.290	0.110	0.434
7	0.289	0.299	0.074	0.408	0.492	0.257	0.288	0.414	0.283
8	0.408	0.503	0.302	0.001	0.108	0.173	0.408	0.457	0.244
9	0.289	0.386	0.292	0.407	0.472	0.303	0.287	0.295	0.150

Quadro 3.4 – Fase da função de transferência avaliada nas diferentes frequências

Modo $j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.000	0.001	0.000	1.424	3.141	3.136	3.129	3.132	3.135
3	0.001	0.001	0.007	3.137	3.139	3.118	0.005	0.000	0.002
4	3.141	3.130	0.003	0.007	3.031	3.140	3.121	0.045	0.020
5	3.140	2.57	0.002	2.897	3.139	1.117	0.018	1.800	3.132
6	3.140	0.016	0.001	3.135	2.913	0.001	3.135	3.099	0.021
7	0.002	3.134	0.003	0.010	3.135	0.009	0.054	3.133	0.011
8	0.004	3.134	0.000	2.081	3.137	0.008	3.080	0.011	3.127
9	0.003	3.134	0.001	3.132	0.008	3.136	0.049	3.128	0.002

Neste momento é importante fazer uma clarificação quanto aos valores de fase obtidos. De facto, como foi dito, os valores obtidos no Quadro 3.4., sendo o amortecimento considerado proporcional, deveriam assumir o valor de 0 ou  $\pi$  radianos, salvo pequenos desvios toleráveis, tendo-se, no entanto, registado a ocorrência de valores diferentes destes nalguns elementos. Tal deve-se ao facto de estes estarem associados a nodos de alguns modos em que o cálculo da sua fase perde o significado. Além disso, devido aos erros introduzidos no processo (já que se analisam estimativas), os valores obtidos para a função de transferência em pontos cuja amplitude é reduzida estão mais vulneráveis ao erro do processo eventualmente existente, uma vez que este pode ter ordens de grandeza semelhantes às da resposta. Se se cruzar a informação dos dois quadros e desprezar os valores residuais, obtém-se os modos do Quadro 3.5:

Quadro 3.5 – Modos obtidos cruzando a informação da amplitude e fase

Modo $j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.289	0.386	0.293	0.411	0.475	0.307	0.288	0.311	0.176
2	0.408	0.504	0.303	0	-0.106	-0.174	-0.410	-0.476	-0.280
3	0.288	0.301	0.074	-0.409	-0.491	-0.257	0.284	0.429	0.314
4	-0.289	-0.087	0.367	0.408	-0.071	-0.558	-0.293	0.121	0.443
5	-0.409	0	0.606	0	-0.212	0	0.409	0	-0.496
6	-0.289	0.084	0.367	-0.407	-0.018	0.557	-0.290	-0.110	0.434
7	0.289	-0.299	0.074	0.408	-0.492	0.257	0.288	-0.414	0.283
8	0.408	-0.503	0.302	0	-0.108	0.173	-0.408	0.457	-0.244
9	0.289	-0.386	0.292	-0.407	0.472	-0.303	0.287	-0.295	0.150

que podem ser comparados com os valores teóricos já obtidos através do seu esboço (na Figura 3.10, apenas se apresenta os 3 primeiros modos) ou do MAC (“Modal Assurance Criterion”). Este índice escalar entre dois vetores assume valores entre zero e um, revelando este último situações de colinearidade entre ambos. Segundo a referência (Allemang, 2003), o MAC entre dois vetores quaisquer  $\underline{u}_1$  e  $\underline{u}_2$  pode ser calculado por:

$$MAC_{\underline{u}_1, \underline{u}_2} = \frac{|\underline{u}_1^H \cdot \underline{u}_2|^2}{(\underline{u}_1^H \cdot \underline{u}_1) \cdot (\underline{u}_2^H \cdot \underline{u}_2)} \quad (3.19)$$

Quadro 3.6 – MAC de cada modo obtido em relação ao modo teórico respetivo

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
MAC	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998

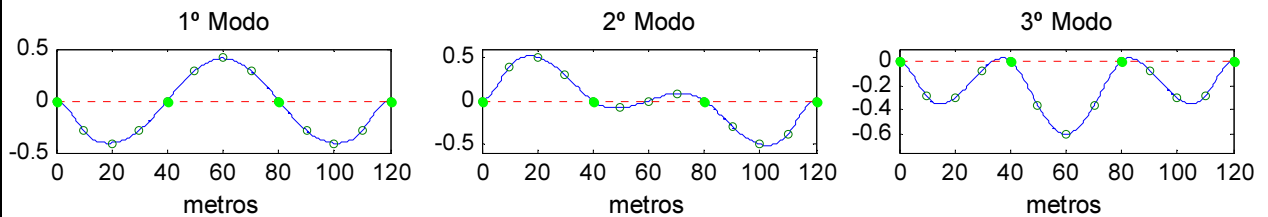


Figura 3.10 – Esboço dos 3 primeiros modos obtidos pelo método PP (em alçado)

#### Estimativa do amortecimento

O amortecimento de cada modo de vibração pode ser determinado através do método da meia potência (Clough and Penzien, 1975), aplicado a um espectro já obtido, segundo a equação:

$$\xi_k = \frac{f_2 - f_1}{2 \cdot f_k} \quad (3.20)$$

em que  $f_2$  e  $f_1$  são as frequências à direita e à esquerda da frequência ressonante, e cuja amplitude se relaciona com esta na razão de 1 para 2. No entanto, como o espectro se encontra definido de forma discreta, estes valores têm de ser obtidos através de interpolações. Este método, apesar de teoricamente conduzir a resultados adequados, como tem como ponto de partida um espectro de potência estimado, e por isso, com ruído, conduz a resultados não muito satisfatórios, como se verá de seguida.

**Exemplo 3.5.** – Para ilustrar as dificuldades em estimar corretamente o amortecimento de cada modo de vibração da estrutura, calculou-se pelo método da meia potência aplicado ao ANPSD obtido no ponto anterior os valores desta grandeza para as diferentes frequências ressonantes. No entanto, e devido ao carácter discreto das séries amostradas, foi necessário recorrer a interpolações (que se consideraram lineares) entre os pontos imediatamente antes e depois de o espectro cruzar metade do valor de cada pico, como se ilustra na Figura 3.11 para o quarto e sétimo picos:

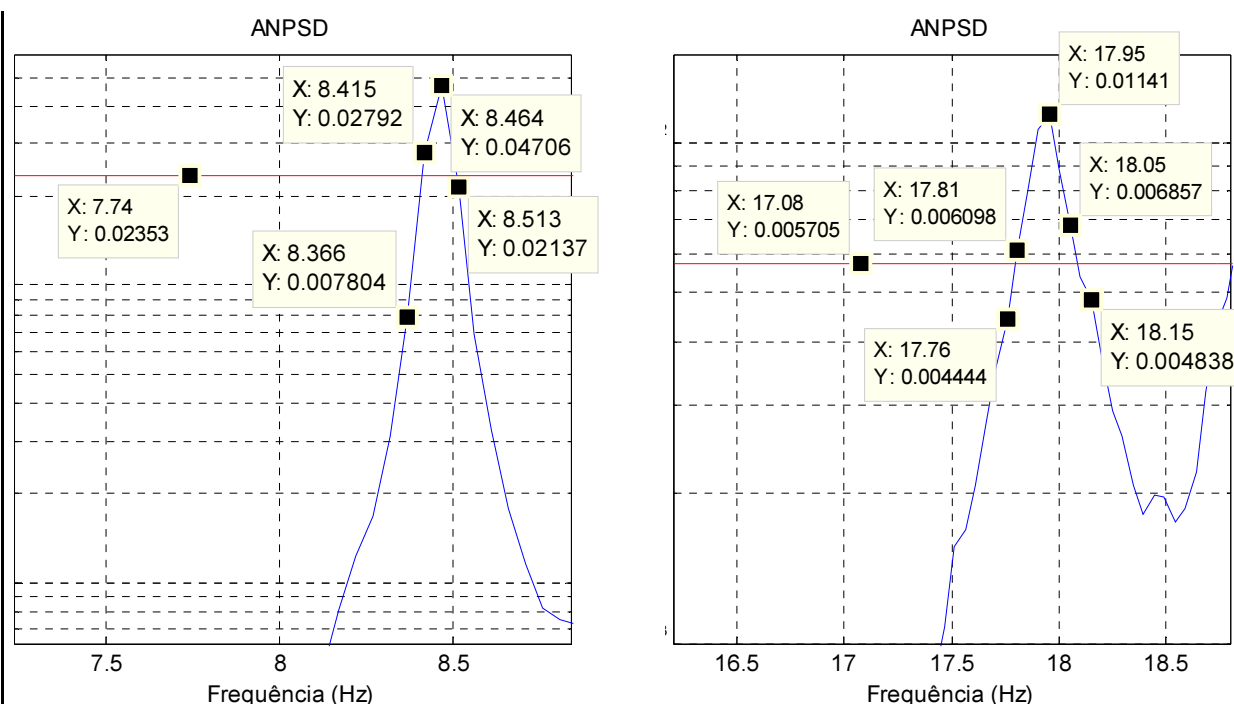


Figura 3.11 – Aproximação do espectro de resposta para o 4º (à esquerda) e 7º (à direita) picos identificados.

Procedendo do mesmo modo para as restantes frequências identificadas, chegou-se aos valores que de seguida se apresenta:

Quadro 3.7 – Valores obtidos para os amortecimentos modais

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\xi$ obtido (%)	2.36	1.41	1.10	0.62	0.73	0.83	0.82	0.86	1.24
$\xi$ teórico (%)	0.2	0.2	0.22	0.38	0.42	0.50	0.75	0.79	0.85

Como se pode constatar, a estimativa obtida é francamente grosseira por ser muito sensível à forma do pico, sendo este fenómeno mais sentido quando o amortecimento é mais baixo e, por isso, o pico mais “aguçado”, o que leva a que o erro introduzido seja mais relevante. Além disso, todas as restantes estimativas, apesar de mais próximas dos valores teóricos, encontram-se avaliadas por excesso, fruto do erro de “leakage” introduzido na aplicação da FFT a cada resposta.

### Função de coerência

Uma maneira suplementar para determinação das frequências naturais da estrutura passa por avaliar a ordem de grandeza da relação entre ruído existente e resposta. De facto, nas vizinhanças das frequências ressonantes, como a amplitude da resposta aumenta significativamente, a influência dos erros das estimativas e do ruído eventualmente presente é reduzida. Para avaliar esta grandeza, pode-se recorrer à função de coerência que, para duas respostas medidas em dois graus de liberdade distintos  $a$  e  $b$ , pode ser escrita como:

$$\gamma_{(a,b)}^2(\omega) = \frac{S_{y_{(a,b)}}(\omega)^2}{S_{y_{(a,a)}}(\omega) \cdot S_{y_{(b,b)}}(\omega)} \quad (3.21)$$

assumindo valores entre zero e um conforme o nível de ruído ou os erros das estimativas são altos ou baixos respetivamente. Assim sendo, é expectável que, quando avaliada entre qualquer sinal e o sinal de referência, a função de coerência assume valores próximos da unidade perto das frequências naturais da estrutura.

**Exemplo 3.6.** – À semelhança do que foi feito para a função de transferência, apresentam-se na Figura 3.12 os gráficos associados à função de coerência entre as respostas medidas no grau de liberdade de referência e as respostas relativas ao segundo e terceiro graus de liberdade (mais uma vez, o gráfico associado ao primeiro grau de liberdade é evidentemente constante e igual a 1).

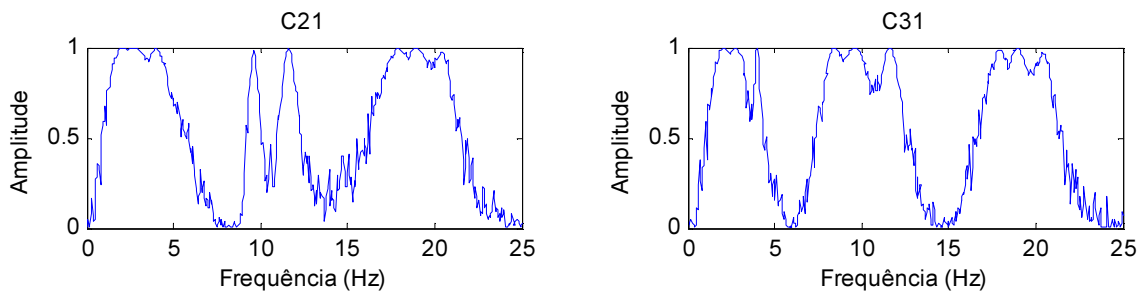


Figura 3.12 – Funções de coerência avaliadas para o 2º e 3º grau de liberdade

No entanto, e de maneira a comprovar o que foi afirmado, resumem-se os valores obtidos para todas as funções de coerência avaliadas para cada uma das frequências já identificadas no Quadro 3.8:

Quadro 3.8 – Valores obtidos para as várias funções de coerência avaliadas nas frequências ressonantes

Modo $j$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	1.000	1.000	1.000	0.013	0.989	0.993	0.993	0.993	0.974
3	1.000	1.000	0.996	0.999	0.999	0.997	0.987	0.990	0.964
4	0.999	0.995	0.999	0.995	0.428	0.995	0.936	0.702	0.936
5	0.999	0.011	0.999	0.002	0.996	0.001	0.963	0.027	0.915
6	0.999	0.989	0.999	0.996	0.284	0.995	0.970	0.809	0.918
7	0.998	0.999	0.991	0.989	0.994	0.986	0.873	0.934	0.879
8	0.998	0.998	0.998	0.019	0.985	0.990	0.912	0.896	0.868
9	0.997	0.998	0.998	0.992	0.990	0.988	0.915	0.893	0.836

Como se pode perceber, os valores obtidos são elevados, o que confirma que para frequências próximas das frequências naturais do sistema, a resposta da estrutura é substancialmente superior ao ruído ou erros das estimativas existentes. No entanto, para graus de liberdade cuja amplitude em determinados modos de vibração seja bastante reduzida, a função de coerência vai resultar em valores mais reduzidos, já que o ruído ou o erro das estimativas existentes e a própria resposta podem ter ordens de grandeza semelhantes. Caso limite sucede nos graus de liberdade que sejam nodos de modos de vibração, pois como este não é detetado, a comparação dá-se entre ruído (aleatório) e uma resposta, o que conduz a resultados próximos de 0.

### 3.3.2. MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA – FREQUENCY DOMAIN DECOMPOSITION

Este método, desenvolvido por Rune Brincker (Brincker [et al.], 2000) tem, em relação ao método já apresentado, a vantagem de permitir tratar adequadamente estruturas com modos de vibração próximos ou praticamente coincidentes, além de fornecer melhores estimativas para o amortecimento dos mesmos. Para tal, é necessário tirar partido da decomposição em valores e vetores singulares de uma matriz (Klema and Laub, 1980), conceito que surge como uma generalização a matrizes retangulares do problema de vetores e valores próprios, e que de seguida se apresenta sinteticamente.

A decomposição em valores singulares (abreviadamente designada SVD – “singular value decomposition”) permite escrever uma matriz  $\underline{M}$  qualquer de tal forma que:

$$\underline{M} = \underline{U} \cdot \underline{S} \cdot \underline{V}^H = \underline{U} \cdot \begin{bmatrix} \underline{S}_1 \\ \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \underline{V}^H \quad (3.22)$$

sendo que, se  $\underline{M}$  for de dimensão  $m.n$  ( $m > n$ ), então  $\underline{U}$  e  $\underline{V}$  são ortogonais, de dimensão  $m.m$  e  $n.n$  e contêm os valores singulares à esquerda e à direita respetivamente. A matriz  $\underline{S}_1$  é quadrada, de dimensão  $n$ , contém os valores singulares de  $\underline{M}$ , cuja ordem (número de colunas/linhas linearmente independentes) é indicada pela quantidade de valores diferentes de zero. Esta operação matemática pode ser calculada a partir da matriz  $\underline{M}$  da seguinte forma:

- os valores singulares são a raiz quadrada positiva dos valores próprios de  $\underline{M} \cdot \underline{M}^T$  e de  $\underline{M}^T \cdot \underline{M}$
- os vetores singulares à esquerda identificam-se com os vetores próprios de  $\underline{M} \cdot \underline{M}^T$  e os vetores à direita com os de  $\underline{M}^T \cdot \underline{M}$

Do acima exposto, pode-se concluir que no caso da matriz em análise ser simétrica (ou hermitiana<sup>6</sup> se se tratar de uma matriz com entidades complexas) os valores singulares e os valores próprios identificam uma e uma só grandeza e as matrizes  $\underline{U}$  e  $\underline{V}$  passam a coincidir e a conter os vetores próprios de  $\underline{M}$ .

A aplicação deste método a estruturas de Engenharia Civil permite, no caso de os amortecimentos serem reduzidos (como normalmente são, e especialmente num ensaio de vibração ambiental, ou seja, com ações de serviço da estrutura), dos modos de vibração próximos serem ortogonais e desta ser animada por uma excitação do tipo ruído branco (como se tem considerado ao longo deste trabalho), decompor a matriz dos espectros num conjunto de funções de densidade espectral de osciladores de um grau de

<sup>6</sup> Uma matriz hermitiana é tal que  $\underline{M} = \underline{M}^H$

liberdade, com as mesmas características dos modos de vibração próprios da estrutura (Brincker [et al.], 2000). Como esta matriz cumpre os requisitos para ser considerada hermitiana, então pode-se escrever, para cada frequência avaliada  $\omega_j$ :

$$\underline{S}_y(\omega_j) = \underline{U}_j \cdot \underline{S}_j \cdot \underline{V}_j^H = \underline{U}_j \cdot \underline{S}_j \cdot \underline{U}_j^H \quad (3.23)$$

Os valores singulares obtidos da decomposição apresentada identificam-se com as ordenadas dos espectros de potência dos osciladores de um grau de liberdade cujos modos que retratam mais contribuem para a configuração da estrutura nessa mesma frequência. Aparecendo estes valores, fruto do algoritmo da decomposição, organizados ao longo da diagonal principal da matriz  $\underline{S}_j$  por ordem decrescente, o primeiro termo estará então associado ao modo dominante nessa mesma frequência (eventualmente mais valores poderão ser interessados neste problema no caso de existirem frequências próximas). Assim sendo, a representação gráfica da variação do primeiro valor singular ao longo das frequências em análise permite identificar para cada frequência ressonante as características do oscilador de um grau de liberdade que domina o movimento. No caso de haver modos próximos, então estes podem ser identificados, já que os valores singulares relevantes nas vizinhanças de uma determinada frequência natural da estrutura serão tantos quantos os modos que coexistam nesta.

Evidentemente, se num ensaio forem monitorizados apenas alguns graus de liberdade em cada “setup”, então apenas é possível decompor uma matriz dessa dimensão e portanto só é possível obter tantos valores singulares não nulos quantos os sensores utilizados. À semelhança do que foi feito para o método da seleção de picos, também agora é necessário proceder à normalização dos valores obtidos nos diferentes “setups”. No entanto, e ao contrário do método anterior, esta não pode ser realizada recorrendo ao ANPSD, uma vez que tal operação levaria à perda das relações de escala entre os diferentes elementos da matriz e, consequentemente, a uma decomposição em valores singulares errada. Assim sendo, optou-se por adaptar o conceito já exposto do ANPSD, efetuando a normalização através da divisão de toda a matriz pela soma do espectro de potência associado a um grau de liberdade de referência. Além disso, e como existe a possibilidade de determinados “setups” não identificarem alguns modos, optou-se por também generalizar o conceito de média de modo a permitir que, na eventualidade de um modo apenas surgir num determinado “setup”, este possa ser detetado através da análise de um só gráfico (aspeto particularmente relevante quando existem frequências próximas e, portanto, mais do que um valor singular relevante cuja ordem de grandeza deve vir corretamente ilustrada, como se verá).

$$\underline{S}_y(\omega)_{ND} = \left( \frac{1}{l} \cdot \sum_{j=1}^l (\underline{S}_y(\omega)_N)^a \right)^{1/a}, \quad \underline{S}_y(\omega)_N = \frac{\underline{S}_y(\omega)_j}{\sum_{k=1}^N \underline{S}_{y(ref,ref)}(\omega_k)_j} \quad (3.24)$$

em que o parâmetro  $a$  pode ser ajustado em função do número de “setups” realizados, e  $l$  e  $N$  têm o mesmo significado atribuído para a definição do ANPSD. As frequências naturais da estrutura podem então ser identificadas como as abcissas para as quais se encontram picos do gráfico dos valores singulares e as respetivas configurações modais obtidas pela primeira coluna da matriz dos vetores singulares  $\underline{U}$  avaliada nessa frequência, no caso de os modos se encontrarem bem separados. Se tal não se verificar, então essa coluna contém o modo dominante de uma determinada frequência, e as colunas associadas aos restantes valores singulares importantes os restantes.

**Exemplo 3.7.** – Para ilustrar o efeito da normalização, geraram-se 4 “setups” em que foram medidos apenas 3 graus de liberdade em cada um para o modelo 2. Os primeiro e segundo graus de liberdade foram sempre medidos, sendo além destes monitorizado sucessivamente o terceiro, o quarto, o quinto e o sétimo. Além disso, induziu-se uma alteração da intensidade de maneira semelhante ao efetuado no método da seleção de picos, tendo as três primeiras séries sido geradas com um desvio padrão igual a 25, enquanto a última tomava a unidade para essa grandeza (Figura 3.13):

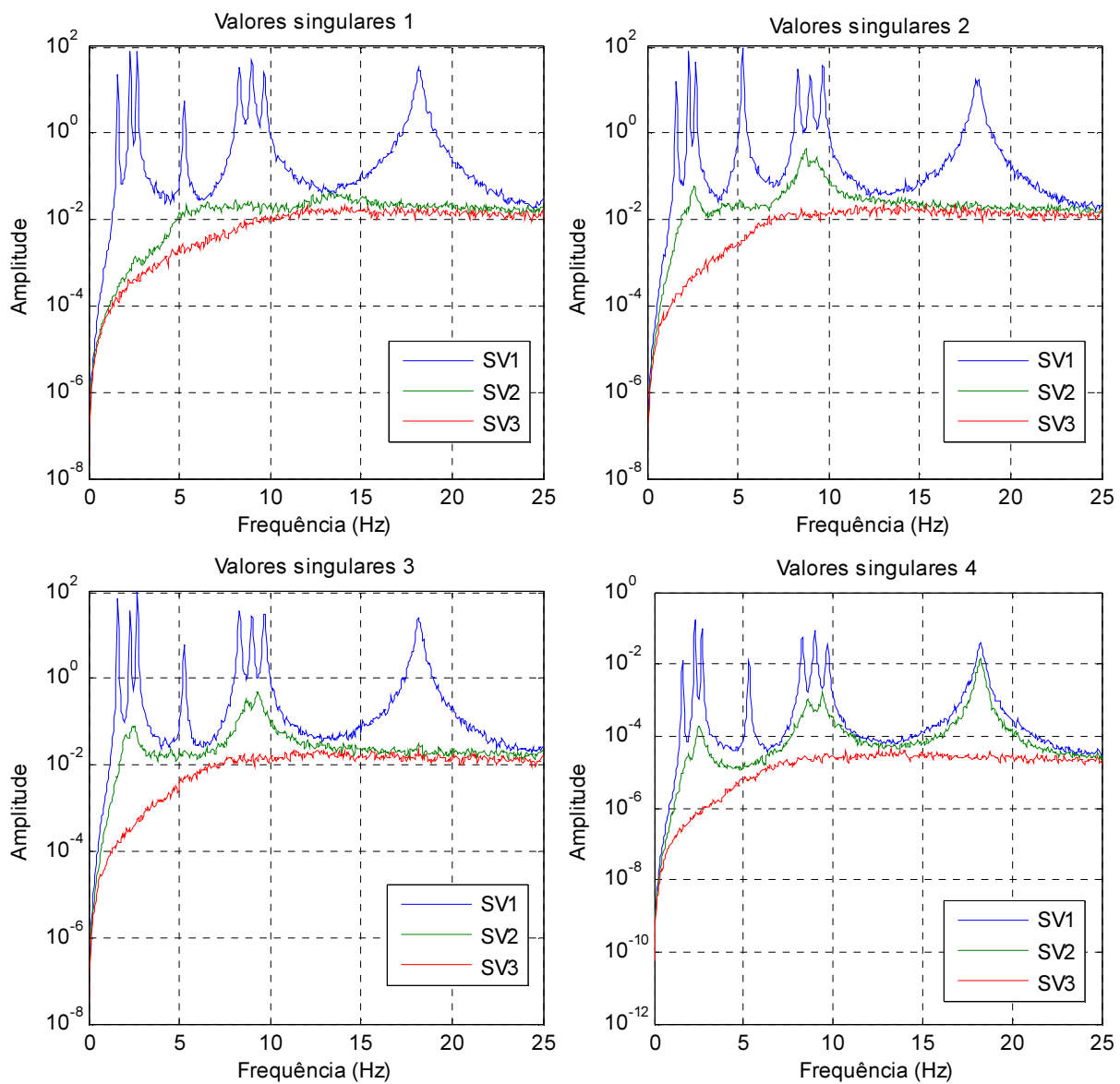


Figura 3.13 – Valores singulares obtidos para os vários “setups”

Como se pode constatar, os dois últimos modos de vibração que eram impossíveis de ser identificados no método anterior são agora revelados pelo aparecimento de um segundo valor singular de ordem de grandeza semelhante ao primeiro (visível apenas no quarto “setup” apresentado). No entanto, e de modo a permitir a análise de apenas um gráfico, calculou-se a média (generalizada com  $\alpha=8$ , valor que se considerou suficiente em função do número de “setups”) com e sem a normalização prévia dos espectros (Figura 3.14):



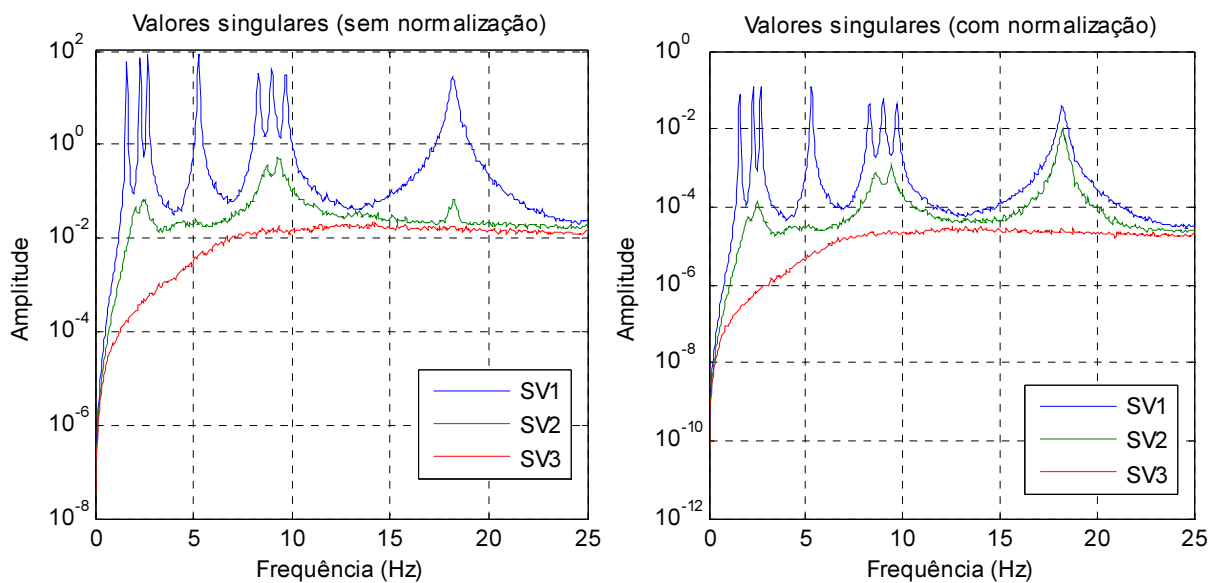


Figura 3.14 – Valores singulares obtidos sem (esquerda) e com (direita) normalização dos espectros

Como se pode ver, as alterações introduzidas no cálculo dos valores próprios permitem que os dois modos com frequências próximas possam agora ser identificados recorrendo a um único gráfico que utiliza informação de vários “setups”.

Com a pertinência dos conceitos introduzidos explicada, procedeu-se então ao cálculo das frequências e modos de vibração para o modelo 1 recorrendo às séries geradas previamente. Assim, obtiveram-se os gráficos apresentados na Figura 3.15 para as variações dos 9 valores singulares obtidos quando são medidos todos os graus de liberdade em simultâneo, onde são visíveis os 9 auto-espectros em correspondência com o mesmo número de osciladores de um grau de liberdade com as características dos modos próprios da estrutura:

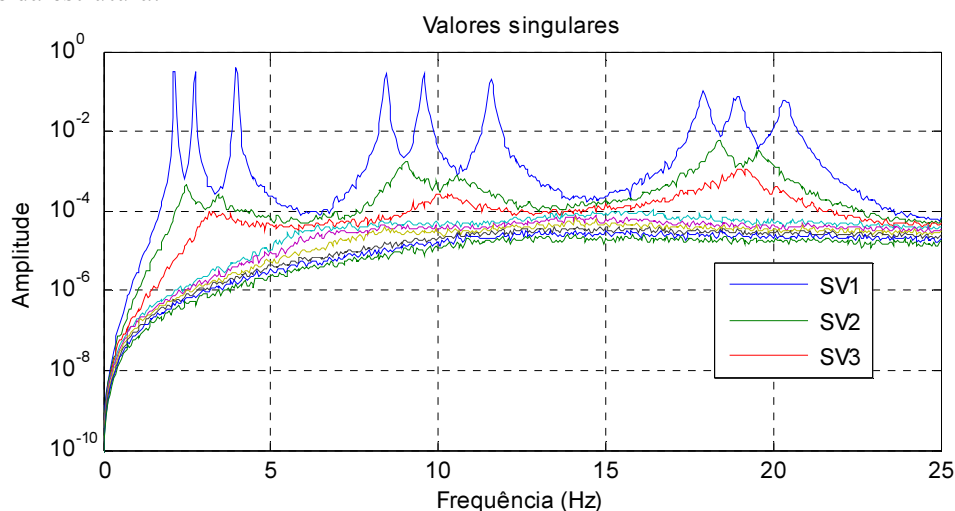


Figura 3.15 – Valores singulares – modelo 1 (apenas se legendou os valores mais relevantes)

À semelhança do efetuado no método anterior, identificaram-se as frequências naturais da estrutura e os respetivos modos de vibração, que foram de seguida comparados com os valores teóricos já obtidos nos Quadros 3.9 e 3.10:

Quadro 3.9 – Comparação entre os resultados teóricos e os obtidos pelo FDD

Modo	Frequência teórica (Hz)	Frequência identificada (Hz)	Erro (%)
1	2.1242	2.153	1.356
2	2.7213	2.740	0.687
3	3.9691	3.963	0.154
4	8.4376	8.464	0.313
5	9.5652	9.589	0.249
6	11.5756	11.595	0.168
7	17.9148	17.955	0.224
8	18.9221	18.934	0.063
9	20.3735	20.401	0.135

Quadro 3.10 – Modos obtidos por aplicação do método FDD

Modo $j \backslash$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-0.290	-0.386	-0.291	-0.406	-0.475	-0.303	-0.294	-0.302	-0.150
2	-0.410	-0.504	-0.301	0.001	0.104	0.175	0.413	0.458	0.253
3	-0.290	-0.300	-0.073	0.406	0.490	0.260	-0.296	-0.422	-0.294
4	0.289	0.085	-0.367	-0.409	0.018	0.559	0.281	-0.128	-0.446
5	0.408	0.003	-0.606	0.001	0.211	0.003	-0.403	0.020	0.507
6	0.289	-0.088	-0.368	0.409	0.016	-0.559	0.282	0.101	-0.445
7	-0.288	0.300	-0.074	-0.410	0.492	-0.255	-0.289	0.418	-0.293
8	-0.407	0.504	-0.302	0.000	0.105	-0.172	0.409	-0.472	0.252
9	-0.287	0.386	-0.292	0.409	-0.474	0.301	-0.290	0.312	-0.151
MAC	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000

Como se pode constatar, a grande vantagem deste método consiste na possibilidade de identificar modos com frequências próximas, o que até aqui não era possível. Um aspeto importante que será apresentado de seguida passa por um aperfeiçoamento introduzido no método que tira partido da proporcionalidade entre a função de correlação da resposta de um oscilador de um grau de liberdade sujeito a um ruído branco e a sua vibração livre para melhorar as estimativas já apresentadas e, sobretudo, apresentar valores adequados para o amortecimento modal (Brincker [et al.], 2001).

### Versão melhorada (Enhanced FDD – EFDD)

Partindo do acima exposto, se para cada frequência ressonante as ordenadas dos auto-espectros (que como já se viu coincidem com os valores singulares) forem transportadas para o domínio do tempo, então obtém-se a função de auto-correlação de um oscilador de um grau de liberdade, proporcional à sua resposta em vibração livre, e que permite obter por relações simples da Dinâmica de Estruturas a sua frequência e amortecimento, ficando assim caraterizado o modo que representa. De facto, para um corpo em vibração livre tem-se que (Clough and Penzien, 1975):

$$\begin{cases} u_n = C \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t_n} \cdot \cos(\omega_a \cdot t_n - \alpha) \\ u_{n+m} = C \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t_{n+m}} \cdot \cos(\omega_a \cdot t_{n+m} - \alpha) \end{cases} \longrightarrow \frac{u_n}{u_{n+m}} = \frac{R_n}{R_{n+m}} = e^{\xi \cdot \omega \cdot \frac{2\pi \cdot m}{\omega_a}} \quad (3.25)$$

em que  $\alpha$  é o angulo de fase,  $\omega_a$  a frequência amortecida,  $u$  e  $R$  respetivamente os valores da resposta e da função de auto-correlação e os índices indicam um afastamento de  $m$  ciclos. Aplicando o logaritmo natural à equação obtida em (3.25), resulta então:

$$\ln\left(\frac{R_n}{R_{n+m}}\right) = \xi \cdot \omega \cdot \frac{2\pi \cdot m}{\omega_a} = \frac{2\pi \cdot \xi \cdot m}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \delta \cdot m \quad (3.26)$$

em que  $\delta$  é o decremento logarítmico. O coeficiente de amortecimento pode então ser obtido a partir de quaisquer dois pontos da função de auto-correlação afastados entre si de  $m$  ciclos por:

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} = \frac{\frac{1}{m} \cdot \ln\left(\frac{R_n}{R_{n+m}}\right)}{\sqrt{(2\pi)^2 + \left(\frac{1}{m} \cdot \ln\left(\frac{R_n}{R_{n+m}}\right)\right)^2}} \approx \frac{\ln\left(\frac{R_n}{R_{n+m}}\right)}{2\pi \cdot m} \quad (3.27)$$

Como se pode ver pela equação (3.26), o decremento logarítmico pode ser definido como o declive de uma reta cuja abcissa dos pontos representa o número de ciclos  $m$  ocorridos até ao instante avaliado e as ordenadas do logaritmo natural do valor da função de auto-correlação. De facto, tal como se encontra definido:

$$\delta = \frac{1}{m} \cdot \ln\left(\frac{R_n}{R_{n+m}}\right) = \frac{\ln(R_n) - \ln(R_{n+m})}{m} \quad (3.28)$$

Este procedimento permitirá estimar o amortecimento modal, já que, tomando como pontos a identificar por exemplo os valores máximos da função de auto-correlação e representando num gráfico as grandezas indicadas no parágrafo anterior, é possível ajustar uma reta através de uma regressão linear, cujo declive coincide com o decremento logarítmico, que pode depois ser relacionado com o amortecimento pela primeira igualdade da equação (3.27).

Por terem origem em espectros estimados a partir de transformações rápidas de Fourier, às quais está associado o erro de “leakage”, os resultados obtidos para o amortecimento tenderão a vir sobreavaliados em relação à realidade. No entanto, a aplicação da FFT inversa a um troço finito dos espectros, resulta em valores mais baixos do que os reais. Assim sendo, é importante que os troços selecionados tenham a maior dimensão e resolução em frequência possível. Mais uma vez, é fundamental neste procedimento

a correção dos segmentos temporais com a adição de zeros, de maneira a permitir um processamento inverso adequado.

Para estimar as frequências naturais da estrutura, é possível proceder de modo semelhante ao descrito, elegendo um conjunto ordenado de pontos singulares (por exemplo, máximos da função da auto-correlação ou passagens por zero) cuja abcissa represente o instante temporal em que ocorrem e a ordenada o número de ciclos que os precede. Como a frequência amortecida, em *rad/s*, é o inverso do tempo necessário para completar um ciclo completo, o seu valor coincide com o declive da reta que se obtém quando se efetua uma regressão linear aos pontos elegidos. A partir desse valor, é possível chegar à frequência natural, conhecido o amortecimento, por:

$$\omega_a = \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega \longrightarrow \omega = \frac{\omega_a}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3.29)$$

De forma a tornar o processo de seleção dos pontos a considerar para aplicação da FFT inversa mais rigoroso, é possível recorrer novamente ao MAC, comparando o primeiro vetor singular de uma determinada frequência com o vetor obtido para cada frequência ressonante, apenas escolhendo aqueles cujo índice seja superior a um determinado valor. Este procedimento de comparação de vetores é também útil para melhorar a estimativa dos próprios modos de vibração, já que é possível proceder à média dos vetores singulares eleitos, ponderada pelo valor singular que lhes está associado.

**Exemplo 3.8.** – Tal como já foi explicado, para este método é necessário estimar os espectros de resposta a partir de séries temporais de dimensão dupla das até aqui apresentadas (devido à adição de zeros), e sem aplicação de qualquer tipo de janela. Assim, para o exemplo de estudo obteve-se o gráfico de variação dos valores singulares presente na Figura 3.16, que se representa na mesma com uma resolução em frequência de 50 Hz (1 em cada 2 pontos do obtido por cálculo) já que os restantes pontos não são mais do que o resultado de interpolações cúbicas entre os originais.

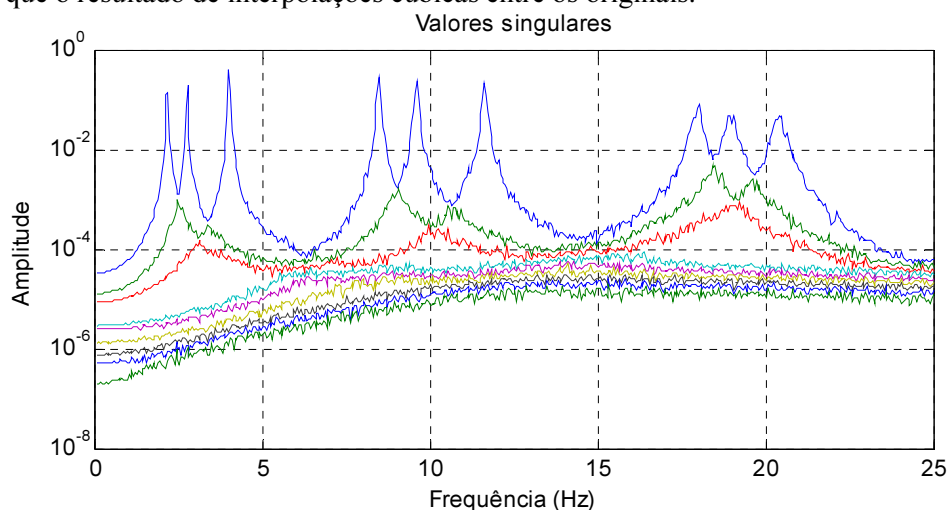


Figura 3.16 – Variação dos valores singulares para o método EFDD

A partir do gráfico apresentado, foram avaliados os MAC entre o primeiro vetor singular numa determinada frequência e o primeiro vetor singular para as frequências ressonantes, tendo-se elegido como válidos todos aqueles que apresentavam um índice de correlação superior a 0,95, resultando desta análise o gráfico de seleção que de seguida se apresenta (Figura 3.17):

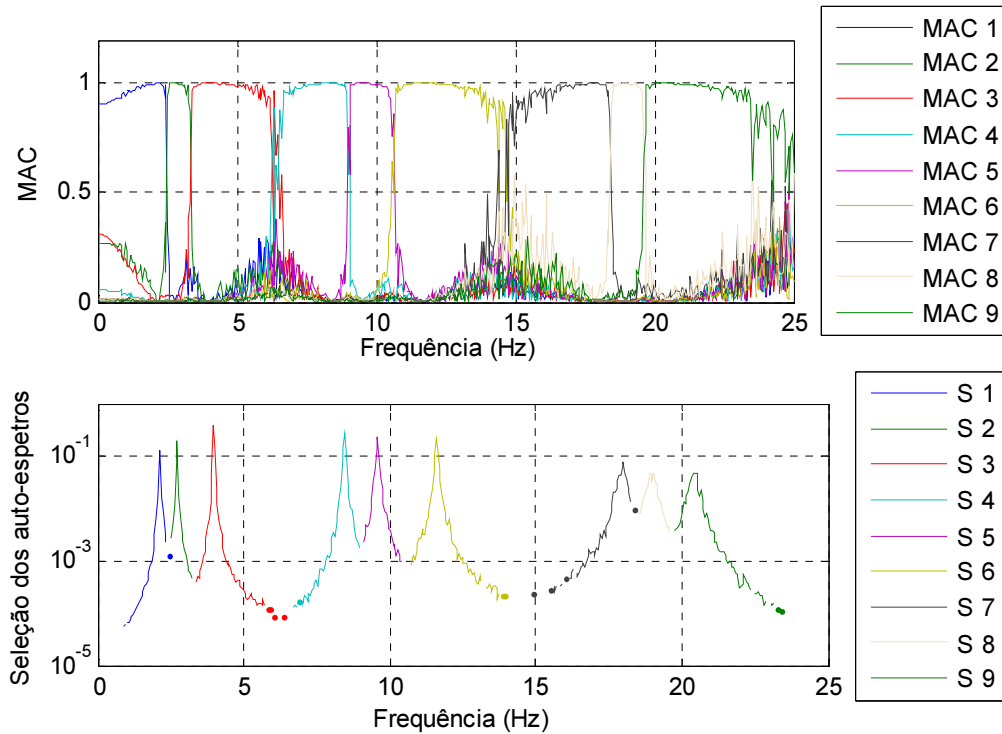


Figura 3.17 – Variação do MAC em relação às diferentes frequências ressonantes (em cima) e respetiva seleção dos espectros (em baixo)

Tendo as zonas que melhor aproximam cada modo devidamente identificadas, é possível caraterizar a função de auto-correlação do oscilador de um grau de liberdade com as mesmas caraterísticas de cada modo de vibração transpondo os espectros de potência para o domínio do tempo e efetuando a divisão pela janela triangular  $(N - j)/N$ . De seguida, apresentam-se as funções de auto-correlação já normalizadas obtidas através da aplicação da transformada inversa de Fourier aos espectros definidos na Figura 3.17. por S2 e S4, bem como os respetivos máximos negativos e positivos (Figura 3.18):

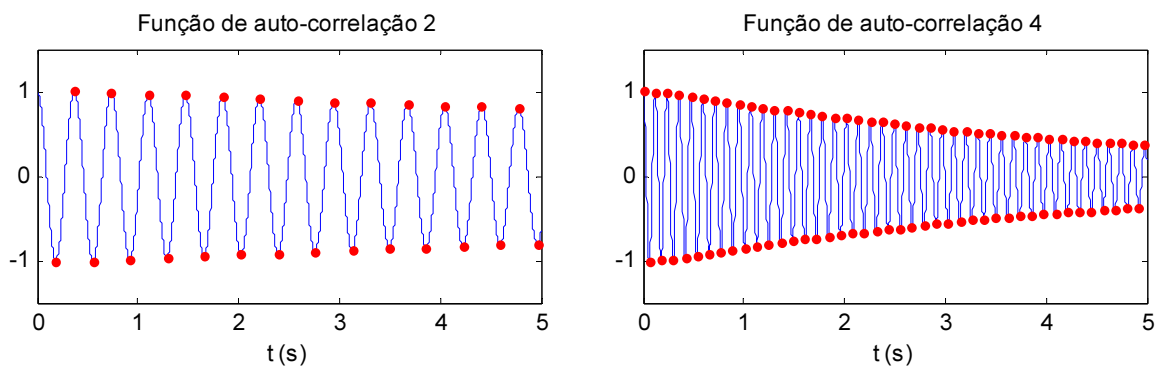


Figura 3.18 – Funções de auto-correlação 2 (à esquerda) e 4 (à direita)

Se se aplicar o logaritmo natural à ordenada dos pontos indicados e os representar num gráfico em função do número de ciclos que os antecede, obtém-se então (Figura 3.19):

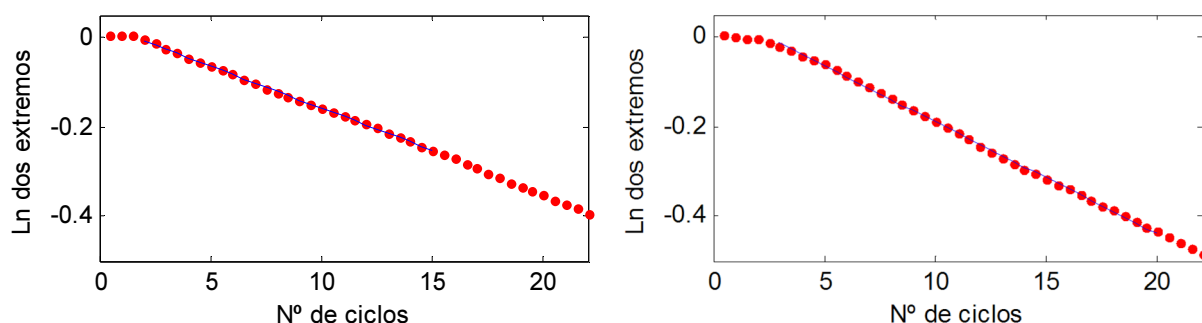


Figura 3.19 – Gráficos para estimativa do amortecimento

Através do ajuste de uma reta aos picos seleccionados, é então possível determinar o decaimento logarítmico associado a cada modo, e consequentemente, pela expressão (3.27) chegar à estimativa do coeficiente de amortecimento correspondente. Por aplicação deste método a todas as funções de auto-correlação obtidas chegou-se aos seguintes valores, que são também comparados no Quadro 3.11 com os obtidos previamente (Quadro 3.7):

Quadro 3.11 – Comparação entre os amortecimentos teóricos e os obtidos pelo EFDD

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\xi_{\text{obtido EFDD}} (\%)$	0.24	0.30	0.23	0.39	0.45	0.44	0.61	0.84	0.86
$\xi_{\text{obtido PP}} (\%)$	2.36	1.41	1.10	0.62	0.73	0.83	0.82	0.86	1.24
$\xi_{\text{teórico}} (\%)$	0.2	0.2	0.22	0.38	0.42	0.50	0.75	0.79	0.85

Se o mesmo procedimento for efetuado para a determinação das frequências, obtém-se os seguintes gráficos e respetiva reta ajustada (Figura 3.20):

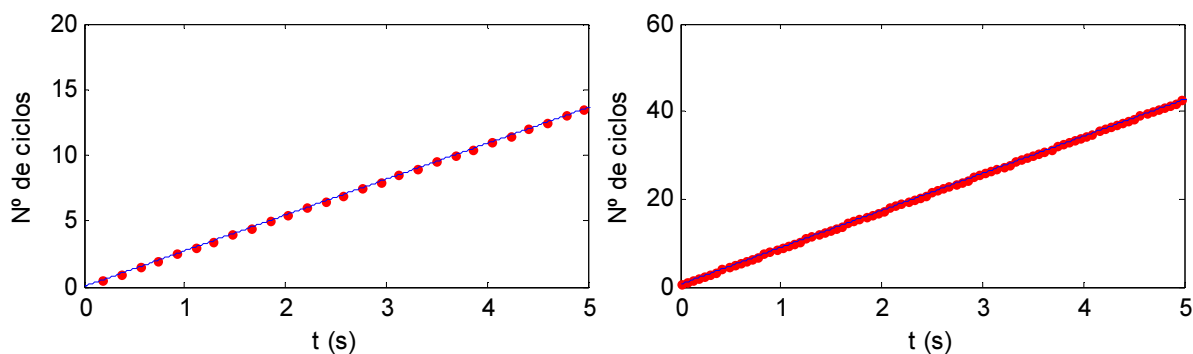


Figura 3.20 – Gráficos para a estimativa das frequências

cujos valores para todas as 9 funções de auto-correlação se sintetizam de seguida no Quadro 3.12:

Quadro 3.12 – Comparação entre as frequências teóricas e as obtidas pelo EFDD

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_{EFDD}(Hz)$	2.123	2.721	3.970	8.436	9.561	11.575	17.965	18.939	20.355
$f_{teórica}(Hz)$	2.1242	2.7213	3.9691	8.4376	9.5652	11.5756	17.9148	18.9221	20.3735
Erro (%)	0.056	0.011	0.023	0.019	0.044	0.005	0.280	0.089	0.091

Como o valor mínimo definido para a seleção da zona do espectro a considerar é bastante elevado (MAC entre primeiro vetor singular e o vetor da frequência ressonante superior a 0.95), os modos obtidos ponderados pelos valores singulares respetivos são praticamente coincidentes com os apresentados no Quadro 3.10, dispensando-se por isso a sua apresentação.

### 3.3.3. MÉTODO DA IDENTIFICAÇÃO ESTOCÁSTICA EM SUB-ESPAÇOS A PARTIR DAS CORRELAÇÕES

O método SSI-COV ("COVariance-driven – Stochastic Subspace Identification") procura identificar um modelo de estado, que como já foi visto permite caraterizar completamente o comportamento dinâmico de uma estrutura, partindo exclusivamente das correlações das respostas monitorizadas. Como já se viu no ponto 2.3, um modelo de estado estocástico discreto pode ser definido por:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \underline{A} \cdot \underline{x}_k + \underline{w}_k \\ \underline{y}_k = \underline{C} \cdot \underline{x}_k + \underline{v}_k \end{cases} \quad (3.30)$$

Como também já foi explicado, se se conseguir caraterizar a matriz  $\underline{A}$ , matriz de estado em tempo discreto, então o processo de identificação fica praticamente concluído, já que a partir desta é possível, como já foi demonstrado, obter frequências, amortecimentos e modos de vibração.

Para o efeito, é útil considerar as matrizes de correlações distribuídas segundo uma matriz de Toeplitz, como se encontra na equação (3.10). De facto, se se considerar a factorização apresentada na equação (2.71), e que pode ser utilizada para as matrizes de referência através da expressão:

$$\underline{R}_y^{ref}(j) = \underline{C} \cdot \underline{A}^{j-1} \cdot \underline{G}^{ref} \quad (3.31)$$

esta matriz pode ser escrita como:

$$\underline{T}_{(1|j_i)}^{ref} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^{j_i-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{A}^{j_i-1} \cdot \underline{G}^{ref} & \dots & \underline{A} \cdot \underline{G}^{ref} & \underline{G}^{ref} \end{bmatrix} = \underline{O}_{j_i} \cdot \underline{\Gamma}_{j_i}^{ref} \quad (3.32)$$

em que as matrizes presentes na última igualdade se designam, respetivamente, matriz de observabilidade estendida e matriz de controlabilidade estocástica estendida invertida. Se simultaneamente com a

equação (3.32) se considerar a decomposição em valores e vetores singulares da matriz de Toeplitz obtém-se:

$$T_{(1|j_i)}^{ref} = \underline{U} \cdot \underline{S} \cdot \underline{V}^T = [\underline{U}_1 \quad \underline{U}_2] \cdot \begin{bmatrix} \underline{S}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{V}_1^T \\ \underline{V}_2^T \end{bmatrix} = \underline{U}_1 \cdot \underline{S}_1 \cdot \underline{V}_1^T \quad (3.33)$$

na qual o índice 2 pretende identificar as sub-matrizes de vetores singulares associadas a valores singulares nulos. Por esse motivo, a primeira igualdade pode ser convertida na última, em que a matriz  $\underline{S}_1$  possui os  $n$  valores não nulos, indicando por isso a ordem do sistema, e as matrizes de vetores singulares à esquerda e à direita apenas contém os vetores associados com esses mesmos valores. Igualando as equações (3.32) e (3.33), é possível definir as matrizes de observabilidade e controlabilidade estendida de várias formas, sendo uma hipótese correntemente utilizada (Peeters, 2000):

$$\begin{aligned} \underline{O}_{j_i} &= \underline{U}_1 \cdot \underline{S}_1^{1/2} \\ \underline{\Gamma}_{j_i}^{ref} &= \underline{S}_1^{1/2} \cdot \underline{V}_1^T \end{aligned} \quad (3.34)$$

Caraterizadas as matrizes  $\underline{O}_{j_i}$  e  $\underline{\Gamma}_{j_i}^{ref}$ , a identificação do modelo de estado torna-se praticamente imediata. De facto, extraíndo as primeiras  $l$  linhas da matriz  $\underline{O}_{j_i}$  (número de graus de liberdade monitorizados num determinado instante) obtém-se imediatamente a matriz  $\underline{C}$ . Intuitivamente, a matriz  $\underline{A}$  poderia ser obtida de igual forma, pré-multiplicando as linhas  $l+1$  até  $2l$  (matriz  $\underline{C} \cdot \underline{A}$ ), pela inversa da matriz  $\underline{C}$  já obtida. No entanto, e de forma a melhorar o resultado obtido, pode-se tomar quaisquer 2 blocos consecutivos de  $l$  linhas, ou, com um procedimento ainda mais robusto, ajustar a matriz  $\underline{A}$  que melhor se enquadra em todos os pares de blocos. O problema em estudo transforma-se então num problema de otimização, podendo-se portanto recorrer à pseudo-inversa de Moore-Penrose para o resolver:

$$\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^{j_i-2} \end{bmatrix} \cdot \underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{C} \cdot \underline{A} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^{j_i-1} \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \cdot \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^{j_i-2} \end{bmatrix}^{\dagger} \cdot \begin{bmatrix} \underline{C} \cdot \underline{A} \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{C} \cdot \underline{A}^{j_i-1} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

A partir do acima exposto, o problema de identificação está concluído com a obtenção da matriz de estado, podendo agora as caraterísticas dinâmicas do sistema ser obtidas através das expressões já apresentada no ponto 2.2.2.2., e que são de seguida recuperadas:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{\Psi} \cdot \underline{\Lambda}_D \cdot \underline{\Psi}^{-1} \\ \mu_k &= e^{\lambda_k \cdot \Delta t} \\ \lambda_k, \lambda_k^* &= -\xi_k \cdot \omega_k \pm i \cdot \sqrt{1 - \xi_k^2} \cdot \omega_k \end{aligned} \quad (3.36)$$

<sup>†</sup> Pseudo-inversa de Moore-Penrose



A dificuldade de aplicação do método surge porque a realidade das estruturas de Engenharia Civil frequentemente não permite uma identificação clara da ordem a considerar para o sistema. De facto, como as correlações analisadas no decorrer de ensaios são meras estimativas, os valores singulares que se supõe nulos na realidade não o são, assumindo antes valores residuais. Seria eventualmente possível identificar a ordem correta através da deteção de um intervalo maior entre valores consecutivos, mas na generalidade dos casos tal também não é possível, visto que essa variação é na realidade pouco acentuada. Assim, não sendo possível identificar à partida a ordem do modelo que melhor ajusta o problema em estudo, é frequente calcular as matrizes  $\underline{A}$  e  $\underline{C}$  para diferentes ordens do modelo ajustado (número de valores e vetores singulares utilizados), obtendo-se de seguida as caraterísticas dinâmicas através das equações (3.36). Esses parâmetros podem de seguida ser comparados com aqueles obtidos para o modelo de ordem imediatamente inferior, sendo considerados estáveis se cumprirem determinadas tolerâncias consideradas aceitáveis (procedimento que se encontra ilustrado na referência (Magalhães and Cunha, 2011)). Além disso, é comum representar-se graficamente as frequências obtidas para os diferentes modelos, o que torna claro quais são aquelas que correspondem a frequências próprias da estruturas e as que têm origem em erros numéricos (modos espúrios). Por fim, é importante ter em conta que para garantir a eficiência do processo (o que implica efetuar a decomposição da matriz  $\underline{T}_{(1|j_i)}^{ref}$  uma única vez), a escolha do valor de  $j_i$  não pode ser deixado ao acaso, já que para obter um modelo de ordem  $n$  é necessário  $n$  seja não superior a  $r \cdot j_i$ . Além disso, esta escolha tem também influência nos resultados obtidos para uma determinada ordem, visto que quanto maior for, mais informação estará contida na matriz  $\underline{T}_{(1|j_i)}^{ref}$ , como se verá de seguida.

**Exemplo 3.9.** – As séries previamente geradas de acelerações dos diferentes graus de liberdade foram dispostas segundo uma matriz de Hankel, tal como se encontra na expressão (3.11), sendo de seguida calculada uma matriz de Toeplitz com as matrizes de correlações (equação (3.10)), assumindo  $j_i = 12$  e portanto, como se mediram e consideraram de referência todos os graus de liberdade, uma ordem máxima ajustável  $r \cdot j_i = 9 \times 12 = 108$ . De seguida, apresenta-se os valores singulares obtidos da decomposição da matriz de Toeplitz criada (Figura 3.21):

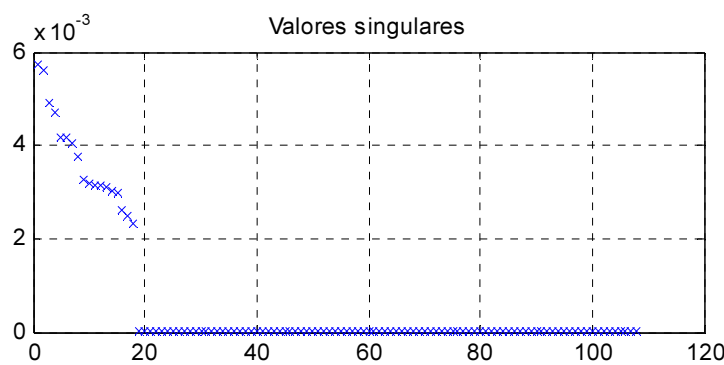


Figura 3.21 – Variação dos valores singulares da matriz de Toeplitz

Como se pode pela Figura 3.21., o comportamento dinâmico da estrutura é bem aproximado por um modelo de estado de ordem 18, como era esperado devido aos 9 graus de liberdade instrumentados (*ordem do modelo* =  $2 \times n^o$  modos). No entanto, e para ilustrar o procedimento correntemente utilizado quando esta identificação não é tão clara, calcularam-se modelos de estado para ordens entre 1 e 108 (máxima possível), tendo os resultados obtidos sido organizados nos diagramas de estabilização

cujos valores considerados relevantes (frequências inferiores a 25 Hz e amortecimentos inferiores a 2%), estáveis e instáveis, de seguida se apresentam na Figura 3.22.:

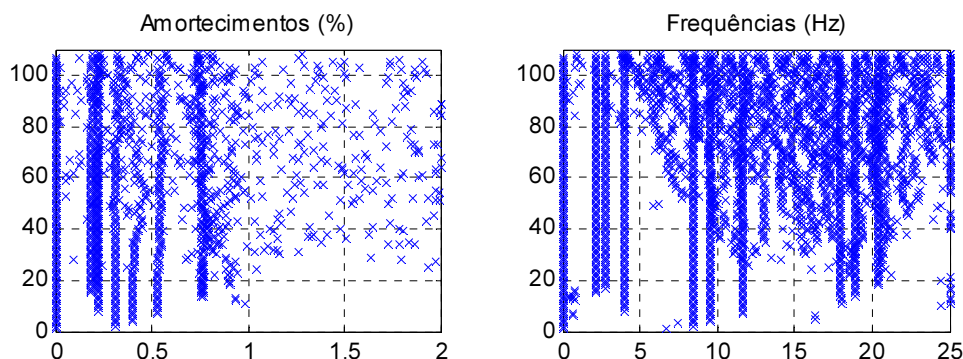


Figura 3.22 – Diagramas de estabilização

Como se pode ver no diagrama das frequências obtidas, apesar da dispersão de resultados, há 9 valores que assumem preponderância e aparecem de maneira sistemática independentemente da ordem escolhida para o modelo, traduzindo assim as frequências naturais da estrutura. No caso do amortecimento, não é tão fácil identificar os 9 valores distintos devido à distância entre alguns dos valores (o 1º e 2º modo têm valores teóricos iguais, por exemplo). De maneira a permitir limpar o gráfico dos valores que não traduzem modos próprios da estrutura, exportaram-se os resultados obtidos para o EXCEL filtrando-se os dados apresentados na figura 3.22. para ordens de modelo pares entre 18 e 108, impondo uma variação relativa do amortecimento e da frequência inferior a 1% e um MAC mínimo para os modos identificados de 0,95 entre ordens consecutivas. Assim, obteve-se o gráfico apresentado na Figura 3.23:

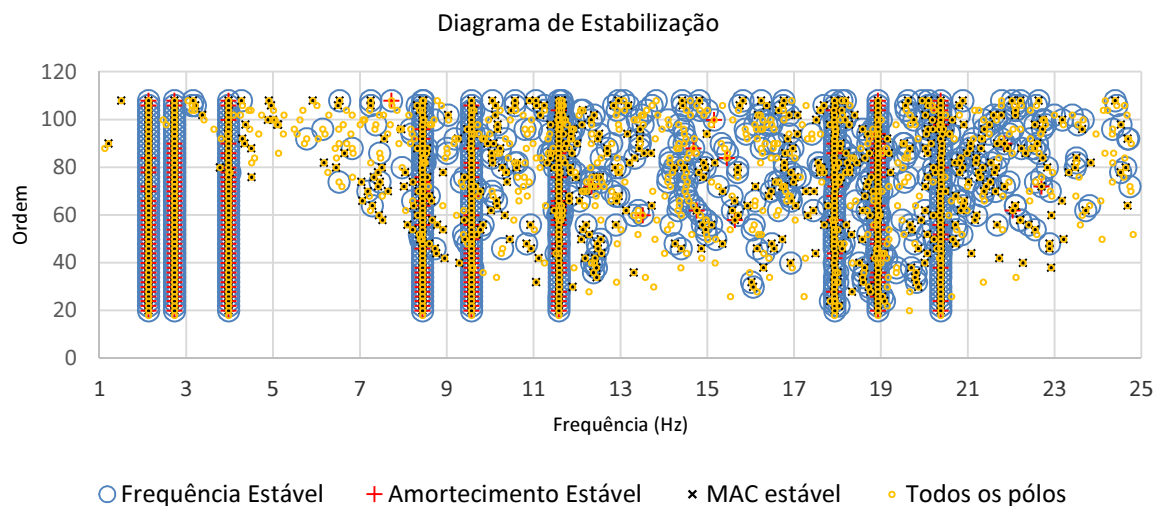


Figura 3.23 – Diagrama de estabilização após tratamento

Por outro lado, e para facilitar a identificação de cada frequência com o seu respetivo amortecimento, é possível representar num gráfico em que o eixo das abcissas seja a frequência e o das ordenadas o amortecimento apenas os pólos considerados estáveis em todos os critérios, de onde se obteve (Figura 3.24):

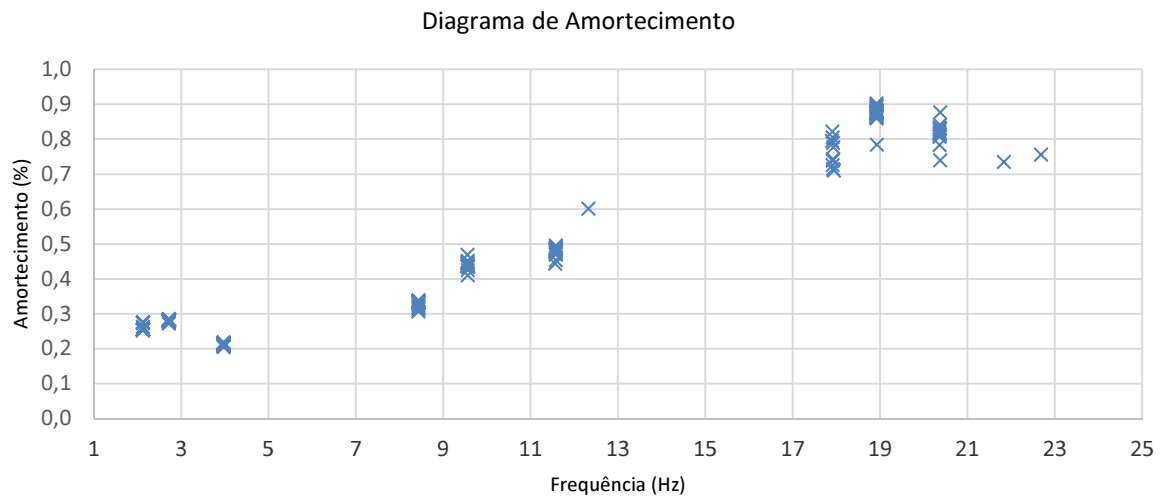


Figura 3.24 – Variação do amortecimento em função da frequência

A partir do qual é possível obter as frequências apresentadas no Quadro 3.13:

Quadro 3.13 – Frequências identificadas pelo método SSI-COV

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_{SSI-COV}(Hz)$	2.125	2.719	3.969	8.435	9.560	11.575	17.923	18.922	20.368
$f_{teórica}(Hz)$	2.1242	2.7213	3.9691	8.4376	9.5652	11.5756	17.9148	18.9221	20.3735
Erro (%)	0.038	0.085	0.003	0.031	0.054	0.005	0.046	0.001	0.027

Além disso, e como já foi referido, a escolha da dimensão da matriz de Toeplitz condiciona os resultados obtidos, sendo esta influência tanto mais notória quanto menor a frequência do modo<sup>7</sup>. Procurando ilustrar o impacto da alteração deste valor geraram-se 100 conjuntos de séries de respostas independentes, corrompidas com um ruído branco de distribuição normal e desvio padrão igual a 10% do desvio padrão do sinal, para as quais se apresentam os resultados médios, o coeficiente de variação (razão entre o desvio-padrão e a média) e os valores extremos para diferentes valores de  $j_i$  quando se ajusta um modelo de dimensão 18, que já se viu traduzir bem o problema. Além disso, e de maneira a avaliar a influência do tempo de observação, calcularam-se os mesmos valores considerando a série completa (10 minutos) ou apenas parte desta (para o caso, 2 minutos). Como os resultados obtidos para as frequências naturais da estrutura são consistentes independentemente dos valores adotados, a análise que de seguida se apresenta será limitada aos valores obtidos para o coeficiente de amortecimento dos diferentes modos. Por fim, e apenas por simplicidade de escrita, apenas se apresentam metade dos valores obtidos, uma vez que estes surgem aos pares (Quadros 3.14 e 3.15):

<sup>7</sup>Note-se que para uma determinada frequência de amostragem e um determinado número de pontos utilizados na criação da matriz de Toeplitz, são incluídos tantos mais ciclos na análise quanto maior a frequência do modo

Quadro 3.14 – Média e coeficiente de variação associados ao amortecimento  
para séries com duração de 10 minutos

$j_i \backslash k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	100.0	0.316	0.210	0.207	0.208	0.208	0.209	0.208	0.209	0.209	0.210
	-	2.657	0.867	0.292	0.255	0.241	0.245	0.259	0.261	0.253	0.249
2	100.0	0.255	0.215	0.211	0.212	0.211	0.208	0.207	0.207	0.207	0.207
	-	0.953	0.272	0.242	0.241	0.249	0.247	0.242	0.234	0.231	0.230
3	100.0	0.233	0.235	0.232	0.234	0.235	0.234	0.235	0.234	0.235	0.235
	-	0.193	0.192	0.171	0.170	0.168	0.167	0.167	0.166	0.167	0.166
4	44.41	0.379	0.380	0.38	0.380	0.381	0.381	0.381	0.381	0.381	0.381
	-	0.105	0.105	0.106	0.108	0.107	0.107	0.107	0.106	0.106	0.106
5	86.03	0.426	0.425	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424
	-	0.084	0.084	0.084	0.083	0.083	0.084	0.084	0.085	0.086	0.087
6	99.85	0.498	0.499	0.499	0.499	0.499	0.499	0.498	0.498	0.498	0.498
	-	0.064	0.063	0.064	0.065	0.065	0.065	0.065	0.065	0.065	0.065
7	99.86	0.763	0.763	0.763	0.763	0.763	0.764	0.764	0.764	0.765	0.765
	-	0.047	0.049	0.049	0.049	0.050	0.050	0.050	0.050	0.051	0.052
8	99.85	0.794	0.793	0.793	0.794	0.794	0.794	0.795	0.796	0.796	0.796
	-	0.041	0.041	0.040	0.041	0.041	0.042	0.043	0.043	0.044	0.044
9	99.85	0.851	0.851	0.850	0.849	0.849	0.849	0.848	0.848	0.848	0.848
	-	0.037	0.039	0.040	0.041	0.041	0.041	0.041	0.042	0.042	0.043

Devido aos valores médios das estimativas obtidas para  $j_i = 2$  não terem significado físico, o cálculo do coeficiente de variação associado a estes termos perde o significado, uma vez que as séries se encontram enviesadas à partida. Para os restantes casos, e como se pode constatar, o coeficiente de variação associado às estimativas obtidas tende a diminuir à medida que a frequência dos modos aumenta, o que era expectável, uma vez que para o mesmo número de pontos são tidos em conta tantos mais ciclos quanto maior a frequência. Além disso, é possível perceber que este valor tende a estabilizar à medida que o número de blocos considerados para a criação da matriz de Toeplitz aumenta.

Quadro 3.15 – Média e coeficiente de variação associados ao amortecimento  
para séries com duração de 2 minutos

$j_i \backslash k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	100.0	0.325	0.279	0.245	0.245	0.245	0.244	0.243	0.242	0.241	0.242
	-	7.262	2.045	0.828	0.601	0.638	0.635	0.624	0.617	0.623	0.633
2	100.0	0.162	0.259	0.262	0.260	0.258	0.258	0.261	0.263	0.263	0.263
	-	4.442	0.669	0.556	0.574	0.571	0.546	0.527	0.521	0.521	0.523
3	99.99	0.254	0.253	0.257	0.258	0.257	0.257	0.257	0.257	0.257	0.258
	-	0.519	0.471	0.457	0.445	0.438	0.438	0.438	0.438	0.438	0.441
4	46.34	0.388	0.386	0.385	0.385	0.385	0.385	0.385	0.385	0.385	0.385
	-	0.229	0.217	0.215	0.215	0.215	0.216	0.216	0.216	0.216	0.217
5	80.72	0.436	0.438	0.438	0.437	0.437	0.436	0.436	0.436	0.436	0.436
	-	0.197	0.195	0.191	0.184	0.181	0.178	0.178	0.179	0.179	0.180
6	99.82	0.507	0.509	0.509	0.509	0.509	0.510	0.510	0.511	0.511	0.511
	-	0.147	0.149	0.151	0.152	0.153	0.154	0.156	0.157	0.158	0.160
7	99.85	0.757	0.755	0.754	0.753	0.752	0.751	0.750	0.750	0.750	0.750
	-	0.103	0.104	0.104	0.105	0.106	0.109	0.110	0.111	0.113	0.115
8	99.86	0.793	0.791	0.789	0.789	0.789	0.788	0.787	0.787	0.787	0.786
	-	0.100	0.102	0.101	0.101	0.101	0.102	0.102	0.101	0.102	0.102
9	99.82	0.853	0.853	0.854	0.856	0.857	0.857	0.857	0.858	0.859	0.859
	-	0.080	0.081	0.089	0.093	0.094	0.095	0.096	0.098	0.101	0.104

Como facilmente se constata, a diminuição da duração das séries amostradas para 2 minutos tem como consequência imediata um aumento significativo do erro associado às diferentes estimativas (por exemplo, o 1º modo passa a estabilizar para um coeficiente de variação de cerca de 60% em detrimento do valor previamente obtido de cerca de 25%). Aspeto curioso e que agora é mais facilmente observado (sobretudo para os modos mais elevados) é a ligeira perda de qualidade dos resultados com um aumento do número de blocos utilizado. Tal fenómeno deve-se a esta última grandeza estar associada à extensão utilizada da função de auto-correlação, sendo que para desfasamentos elevados e modos de frequência elevada a sua amplitude é reduzida e, portanto, mais suscetível de ser afetada pelos erros do método e/ou ruídos do processo.

### Modos de Vibração

A determinação dos modos de vibração pelo método apresentado é conseguida a partir dos vetores próprios da matriz de estado identificada. No entanto, quando a ordem do modelo é desconhecida, para cada ordem  $n$  testada a matriz  $\underline{\Psi}$  obtida tem dimensão  $n \cdot n$  e, portanto,  $n$  vetores próprios de igual dimensão. Por outro lado, apenas são instrumentados  $l$  graus de liberdade num determinado instante, sendo portanto evidente que apenas estes podem ser caracterizados (sendo  $l < n$ ). De forma a conseguir obter os  $l$  valores interessados a partir dos  $n$  obtidos para cada modo, é necessário então proceder a uma mudança de variável do modelo de estado em tempo contínuo apresentado no ponto 2.2.2. De facto, se se assumir:

$$x_m(t) = \underline{\Psi}^{-1} \cdot x(t) \longrightarrow x(t) = \underline{\Psi} \cdot x_m(t) \quad (3.37)$$

é fácil perceber que as equações que regem o modelo de estado se transformam em:

$$\begin{aligned} \underline{\Psi} \cdot \dot{x}_m(t) &= \underline{A}_c \cdot \underline{\Psi} \cdot x_m(t) + \underline{B}_c \cdot \underline{f}(t) & \dot{x}_m(t) &= \underline{A}_c \cdot x_m(t) + \underline{\Psi}^{-1} \cdot \underline{B}_c \cdot \underline{f}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C}_c \cdot \underline{\Psi} \cdot x_m(t) + \underline{D}_c \cdot \underline{f}(t) & \underline{y}(t) &= \underline{C}_c \cdot \underline{\Psi} \cdot x_m(t) + \underline{D}_c \cdot \underline{f}(t) \end{aligned} \quad (3.38)$$

em que a matriz  $\underline{V}_c = \underline{C}_c \cdot \underline{\Psi}$  assume significado particularmente interessante já que contém ao longo das suas colunas os modos de vibração observáveis para um determinado “setup” da estrutura. Como a matriz  $\underline{C}_c$  é igual à sua correspondente em tempo discreto, então é possível utilizar a matriz já estimada para identificação dos modos da estrutura.

No caso corrente de realização de vários “setups”, os dados associados a cada um destes podem ser tratados separadamente e normalizados em função dos sensores de referência, sendo depois combinados para a obtenção dos modos finais da estrutura. No entanto, como se encontra na referência (Magalhães, 2010), este procedimento acarreta consigo a necessidade de interpretar vários diagramas de estabilização, tantos quanto o número de “setups” efetuados, apesar de permitir avaliar a influência de fatores como a temperatura ou a intensidade do tráfego nos resultados obtidos.

Para simplificar o tratamento dos dados, e à semelhança dos outros métodos já apresentados, é possível atingir os resultados pretendidos avaliando um único diagrama de estabilização com informação de vários “setups”. Neste trabalho, dá-se primazia à metodologia descrita na referência (Parloo, 2003) como “Post Global Estimation Re-scaling Approach”. Esta técnica passa por dispor as matrizes de entrada no sistema (matrizes de correlação neste caso) criadas para os vários “setups” ao longo de uma coluna de uma única matriz de blocos. É então aplicado o algoritmo do método a esta última, obtendo-se os resultados pretendidos, sendo estes constituídos por blocos associados aos vários “setups”. Do exposto, resulta esquematicamente a Figura 3.25:

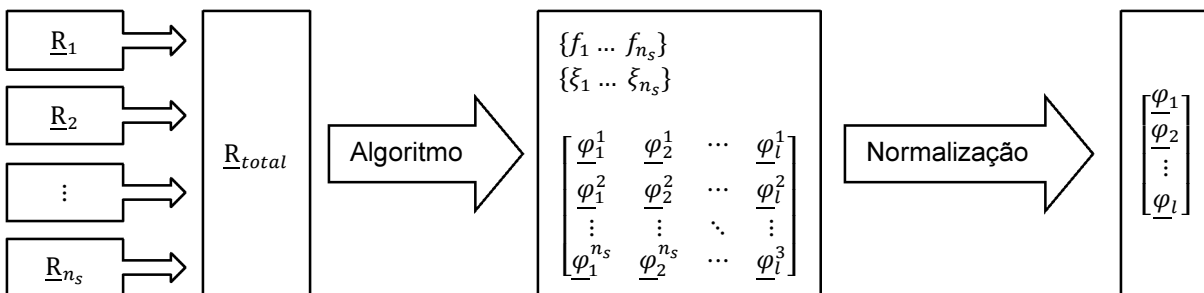


Figura 3.25 – Esquema de funcionamento do método “Post Global Estimation Re-scaling Approach”  
(adaptado de (Parloo, 2003))

Do procedimento acima exposto resultam então tantas frequências e coeficientes de amortecimento quanto a ordem do modelo imposto, e o mesmo número de modos, sendo cada um deles constituído por  $n_s$  blocos associados a cada “setup”. Devido a não se ter feito nenhum escalamento prévio das matrizes de entrada, os resultados obtidos não se encontram devidamente escalados, sendo portanto necessário contornar este problema de algum modo. Um procedimento que pode ser utilizado para converter os modos identificados para uma escala comum encontra-se na referência (Parloo, 2003), na qual, assumindo a escala dos modos de um determinado “setup”  $k$  como referência para o processo  $(\underline{\phi}_i^{k,ref})$ , o modo  $i$  do “setup”  $j$  ( $\underline{\phi}_i^j$ ) pode ser escalado a partir de:

$$\underline{\phi}_i^{j \rightarrow k} = \alpha_i^{j \rightarrow k} \cdot \underline{\phi}_i^j \quad (3.39)$$

sendo

$$\alpha_i^{j \rightarrow k} = \frac{(\underline{\phi}_i^{j,ref})^H \cdot (\underline{\phi}_i^{k,ref})}{(\underline{\phi}_i^{j,ref})^H \cdot (\underline{\phi}_i^{j,ref})} \quad (3.40)$$

A configuração modal completa pode então ser obtida por

$$\underline{\phi}_i = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_i^{k,ref} \\ \underline{\phi}_i^{1 \rightarrow k, mov} \\ \underline{\phi}_i^{2 \rightarrow k, mov} \\ \vdots \\ \underline{\phi}_i^{n_s \rightarrow k, mov} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

em que a indicação *mov* representa os graus de liberdade que não são de referência (associados a sensores móveis) em cada “setup”.

**Exemplo 3.10.** – Para exemplificar a determinação dos modos apresentada, utilizaram-se três “setups” distintos, com diferentes posicionamentos dos sensores e níveis de intensidade, resumidos no Quadro 3.16. que de seguida se apresenta:

Quadro 3.16 – Caraterísticas dos diversos “setups” utilizados

Setup	Graus de liberdade instrumentados	Desvio - padrão
1	1,2,4,6,7	1
2	1,3,4,7,8	9
3	1,4,5,7,9	25

Como se pode constatar, são considerados 3 sensores de referência associados aos graus de liberdade 1, 4 e 7, tendo por isso a matriz de correlações  $R_{total}$  dimensão  $15 \times 3$ . Assim sendo, utilizou-se na criação da matriz de Toeplitz  $j_i = 36$  de maneira a permitir ajustar modelos da mesma dimensão dos utilizados no Exemplo 3.9. Da aplicação do método obteve-se um diagrama de estabilização em tudo semelhante ao previamente apresentado, omitindo-se assim a sua apresentação. Para um modelo ajustado de ordem 18, obteve-se então os seguintes modos de vibração (com 15 valores cada), dos quais que se apresentam de seguida o 1º e 5º sem qualquer normalização, tendo os valores apresentados sido apenas multiplicados por 1000 por simplicidade de apresentação:

$$\begin{aligned} \underline{\phi}_{(1:5,1)} &= \begin{bmatrix} 0.0170 \pm 0.1131 \cdot i \\ 0.0240 \pm 0.1596 \cdot i \\ -0.0172 \pm 0.1125 \cdot i \\ -0.0169 \pm 0.1135 \cdot i \\ 0.0170 \pm 0.1120 \cdot i \end{bmatrix}, & \underline{\phi}_{(1:5,5)} &= \begin{bmatrix} -0.1713 \pm 0.2469 \cdot i \\ 0.0374 \pm 0.0551 \cdot i \\ 0.0047 \pm 0.0087 \cdot i \\ 0.0072 \pm 0.0084 \cdot i \\ 0.1732 \pm 0.2584 \cdot i \end{bmatrix} \\ \underline{\phi}_{(6:10,1)} &= \begin{bmatrix} 1.4326 \pm 9.9349 \cdot i \\ 1.4807 \pm 9.9003 \cdot i \\ -1.5173 \pm 9.9933 \cdot i \\ 1.5791 \pm 10.0103 \cdot i \\ 2.2508 \pm 14.1947 \cdot i \end{bmatrix}, & \underline{\phi}_{(6:10,5)} &= \begin{bmatrix} -14.7489 \pm 20.9385 \cdot i \\ 15.3023 \pm 21.6434 \cdot i \\ 0.4342 \pm 0.6708 \cdot i \\ 15.1293 \pm 21.7223 \cdot i \\ 3.2751 \pm 4.6242 \cdot i \end{bmatrix} \\ \underline{\phi}_{(11:15,1)} &= \begin{bmatrix} 14.712 \pm 10.1436 \cdot i \\ -1.4645 \pm 10.1265 \cdot i \\ -2.0814 \pm 14.3077 \cdot i \\ 1.4697 \pm 10.1238 \cdot i \\ 1.4695 \pm 10.1131 \cdot i \end{bmatrix}, & \underline{\phi}_{(11:15,5)} &= \begin{bmatrix} 123.343 \pm 180.542 \cdot i \\ 4.735 \pm 5.623 \cdot i \\ 55.231 \pm 79.288 \cdot i \\ 128.007 \pm 184.643 \cdot i \\ 123.407 \pm 178.149 \cdot i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Após a aplicação da equação (3.40) considerando o 2º “setup” como referência, obteve-se os seguintes resultados para os coeficientes  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1^{1 \rightarrow 2} &= 88.6416 \pm 0.0348 \cdot i \\ \alpha_1^{3 \rightarrow 2} &= (98.5899 \pm 0.6110 \cdot i) \cdot 10^{-3} \\ \alpha_5^{1 \rightarrow 2} &= 85.1496 \pm 0.10823 \cdot i \\ \alpha_5^{3 \rightarrow 2} &= (117.48 \pm 0.0094 \cdot i) \cdot 10^{-3} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Se aos vetores obtidos por multiplicação do resultado inicial pelo respetivo coeficiente, se aplicar a expressão (3.41) e efetuar a conversão dos mesmos para o espaço real e norma unitária, obtém-se então os resultados finais para um modelo de ordem 18 que se apresentam no Quadro 3.17:



Quadro 3.17 – Modos finais obtidos após escalonamento e aglutinação dos vários “setups”

Modo <i>j</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.288	0.387	0.293	-0.407	-0.476	-0.302	-0.292	-0.306	-0.154
2	0.409	0.508	0.301	0.000	0.105	0.172	0.416	0.472	0.254
3	0.286	0.299	0.072	0.407	0.492	0.256	-0.293	-0.414	-0.294
4	-0.288	-0.087	0.368	-0.408	0.015	0.559	0.287	-0.112	-0.447
5	-0.407	-0.002	0.606	0.001	0.211	0.000	-0.411	0.003	0.509
6	-0.291	0.086	0.364	0.408	0.017	-0.559	0.287	0.125	-0.441
7	0.288	-0.298	0.076	-0.409	0.491	-0.258	-0.284	0.419	-0.292
8	0.411	-0.501	0.304	0.000	0.105	-0.174	0.403	-0.465	0.256
9	0.288	-0.385	0.293	0.411	-0.473	0.304	-0.282	0.304	-0.147
MAC	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

### 3.3.4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a aplicação dos vários métodos apresentados é então possível retirar algumas conclusões importantes para a sua aplicação. O método da seleção de picos demonstrou-se capaz de identificar corretamente os modos principais da estrutura e respetivas configurações, sendo a sua aplicação bastante simples e prática. No entanto, este método demonstrou-se incapaz de estimar amortecimentos modais corretamente e obrigou a uma separação prévia das séries temporais em função do tipo de movimento que caracterizavam. O método da decomposição no domínio da frequência, sobretudo na sua versão melhorada, permitiu vencer desde logo estes dois grandes problemas do método anterior, sendo no entanto a sua aplicação ligeiramente mais laboriosa e apresentando ainda alguma dificuldade na estimativa do amortecimento, possibilitando ainda uma apreciação gráfica interessante do processo por parte do utilizador (nomeadamente no ajuste da exponencial negativa à função de auto-correlação obtida). Por fim, o método da identificação estocástica em sub-espacos a partir das correlações conseguiu estimar de forma mais consistente os amortecimentos modais, sendo no entanto os seus resultados bastante influenciados pela duração das séries temporais e todo o mecanismo de caracterização praticamente invisível ao utilizador.

Os exemplos apresentados no decorrer deste Capítulo foram fundamentais para validar as rotinas de MATLAB criadas no âmbito deste trabalho e permitiram abordar o caso real apresentado no Capítulo 4, para o qual se esperam dificuldades ainda não sentidas com a utilização de dados gerados artificialmente, com bastante confiança nos algoritmos criados.



## 4

## APLICAÇÃO À PONTE SOBRE O RIO DOURO (A41)

### 4.1. INTRODUÇÃO

Depois de devidamente explicados, os diferentes métodos de identificação dinâmica a partir de excitações estocásticas podem agora ser aplicados ao estudo de uma estrutura real de Engenharia Civil. Para este trabalho, escolheu-se a ponte da auto-estrada A41 sobre o Rio Douro, projeto do Engenheiro Armando Rito e concluída em Agosto de 2010. Esta obra é constituída por dois tabuleiros independentes de 6 vãos, afastados entre si de 15 centímetros, perfazendo um comprimento total de 730 metros entre os eixos dos encontros (Figura 4.1). O tabuleiro, com 19,325 metros de largura, em betão armado e pré-esforçado longitudinalmente, utiliza uma secção transversal do tipo viga-caixão com secção variável de acordo com uma função parabólica. Por uma questão de simplicidade de apresentação, os resultados obtidos para os modos de vibração da estrutura serão ilustrados tendo como base o modelo do tabuleiro de jusante, fazendo-se a comparação com o tabuleiro de montante sempre que tal seja pertinente.

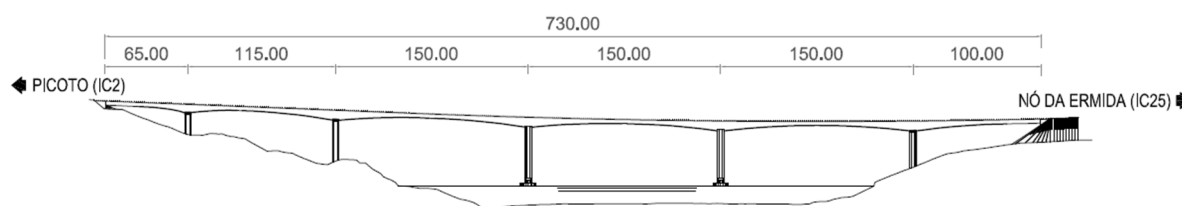


Figura 4.1 – Alçado da ponte sobre o Rio Douro

### 4.2. MODELO NUMÉRICO

Numa primeira fase, e até como forma de controlar os resultados obtidos através do ensaio apresentado no ponto 4.3., construiu-se no software comercial ROBOT STRUCTURAL ANALYSIS um modelo simplificado formado por barras tridimensionais da obra de arte em estudo, baseado no projeto do mesmo do Engenheiro Armando Rito. Tendo em conta a variação da secção ao longo dos vãos fruto do processo construtivo adotado (avanços sucessivos), dividiu-se cada vão em tantos troços quanto as aduelas utilizadas na construção, ficando cada barra definida com as caraterísticas da secção média do troço obtido. De seguida, apresenta-se a secção utilizada a meio vão (Figura 4.2), bem como uma vista global do modelo (Figura 4.3):

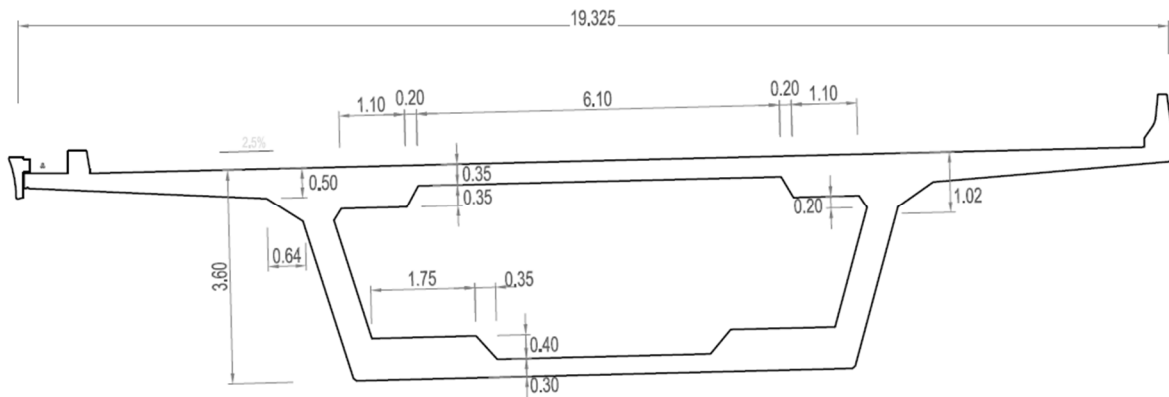


Figura 4.2 – Secção utilizada a meio vão e sobre os encontros

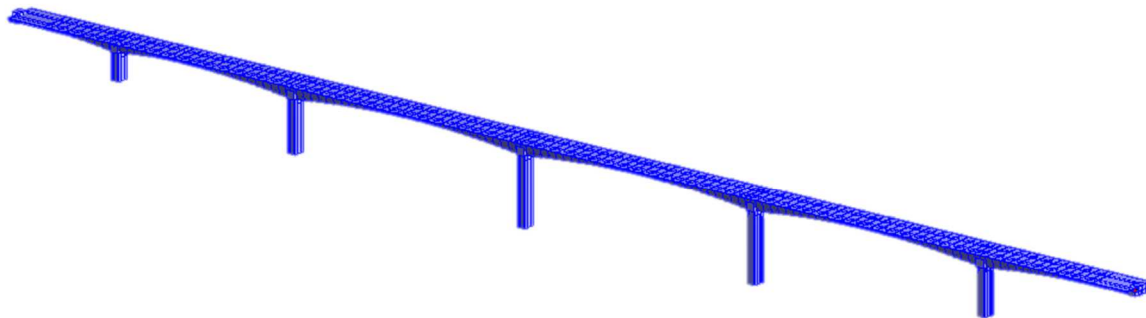


Figura 4.3 – Vista em perspectiva do modelo utilizado.

Devido à variação da secção e, consequentemente, do centro de gravidade da mesma, as barras criadas surgem com um determinado distanciamento vertical em relação às suas vizinhas. Para restituir a continuidade da estrutura, estas foram ligadas entre si por elementos sem massa e com rigidez suficientemente elevada para serem considerados rígidos. A ligação do tabuleiro com os pilares e encontros dá-se, para cada alinhamento, através de 2 aparelhos de apoio, um dos quais permitindo deslocamentos transversais e longitudinais e o outro apenas longitudinais (Figura 4.4), à exceção dos 3º e 4º pilares a contar da esquerda para a direita na Figura 4.3, que se encontram construídos em continuidade com o tabuleiro.

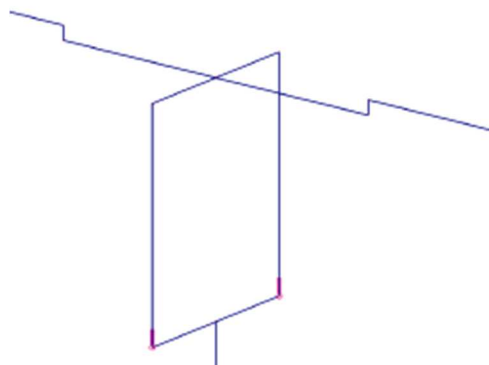


Figura 4.4 – Pormenor da inserção do tabuleiro num dos pilares

Note-se que a libertação total e sem qualquer oposição ao movimento do tabuleiro por parte dos pilares, assim como o encastramento perfeito assumido nas fundações, não será realista. No entanto, esta discussão ficará reservada para o Capítulo 5, assumindo-se para já estas simplificações. Por outro lado, e porque a sua concretização é mais simples e objetiva, as restantes cargas permanentes foram introduzidas na ponte de acordo com o projeto através de cargas distribuídas (Quadro 4.1), posteriormente convertidas para massas. Este aspeto é importante visto que a massa destes elementos não é desprezável para uma correta definição das frequências da estrutura.

Quadro 4.1 – Restantes cargas permanentes consideradas

Elemento	Peso Linear (kN/m)
Viga de bordadura	3.50
Passeio	3.58
Guarda-corpos	1.00
Perfis metálicos de segurança	1.00
Lancil	3.23
New-Jersey	6.25
Tapete betuminoso	53.18
<b>Total (<math>\approx</math>)</b>	<b>72.00</b>

A partir de uma análise modal do modelo apresentado obteve-se então os modos das Figuras 4.5 e 4.6:

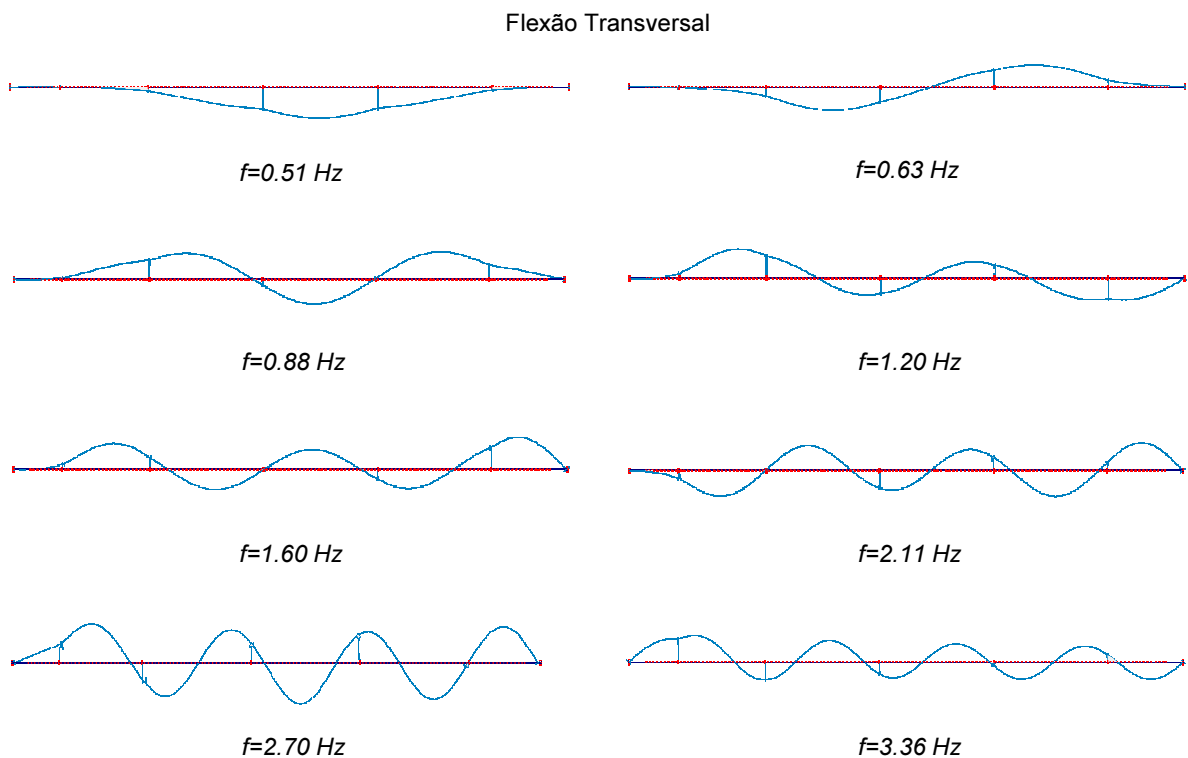


Figura 4.5 – Esboço dos principais modos transversais (vista em planta)

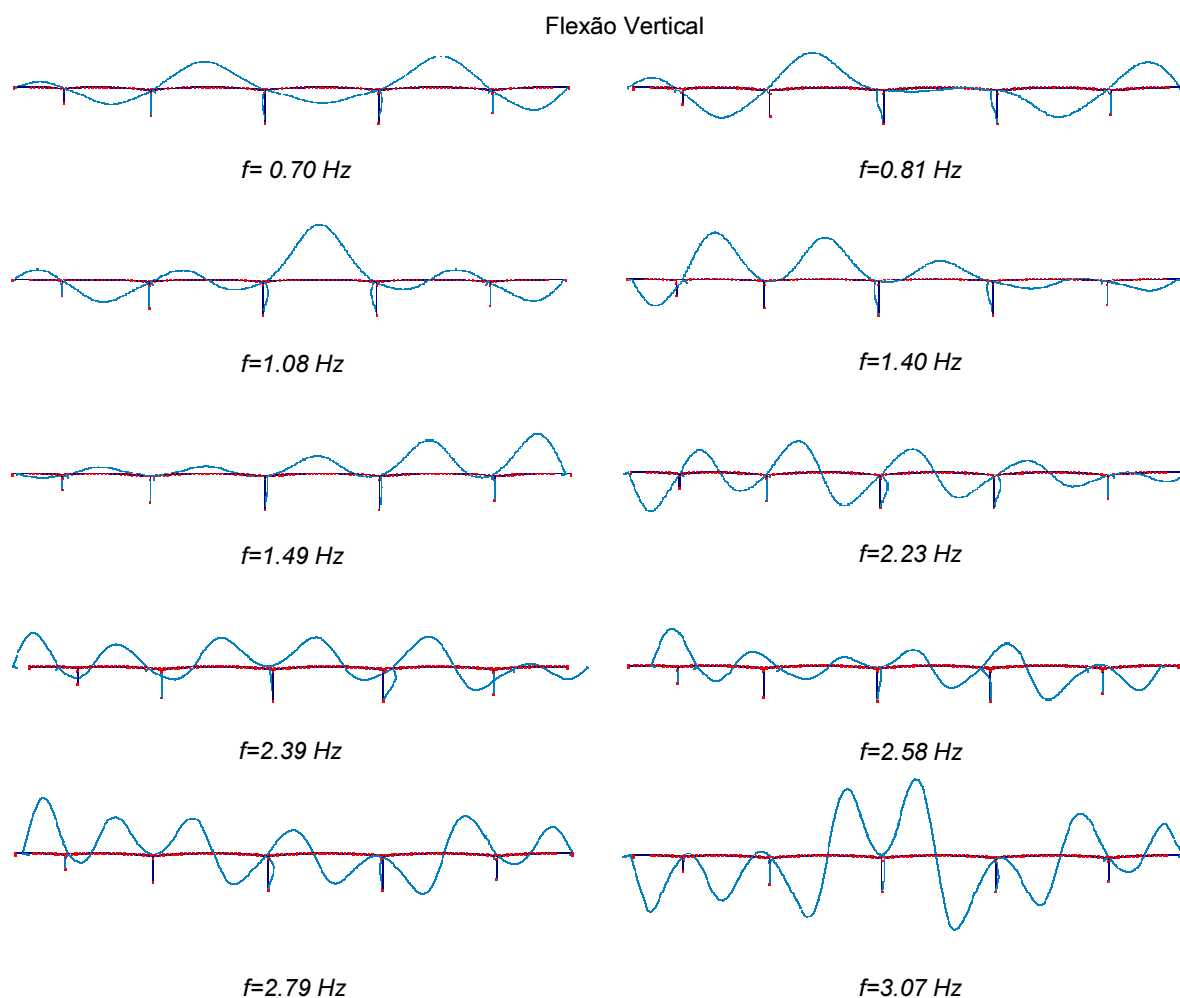


Figura 4.6 – Esboço dos principais modos verticais (vista em alçado)

Além disso, e sendo os tabuleiros de jusante e montante em tudo idênticos à exceção do primeiro pilar a contar da esquerda no alçado apresentado (tendo este cerca de 18.6 metros medidos até à sua base no primeiro caso e apenas 12.6 metros no segundo), apresentam-se unicamente os resultados obtidos para a modelação do tabuleiro de jusante, sendo nesta primeira fase importante reter apenas o aspeto geral dos modos identificados e a ordem de grandeza das frequências da estrutura.

### 4.3. ENSAIO DE VIBRAÇÃO AMBIENTAL

Para o ensaio da obra de arte em estudo, tirando partido exclusivamente de excitações a que a estrutura se encontra sujeita durante o seu normal funcionamento, utilizaram-se sensores capazes de medir acelerações, recolhendo informação em 3 direções ortogonais entre si durante 16 minutos a uma taxa de 100 Hz em 22 pontos distintos em ambos os tabuleiros (jusante primeiro e de seguida montante), como indicado na Figura 4.7:

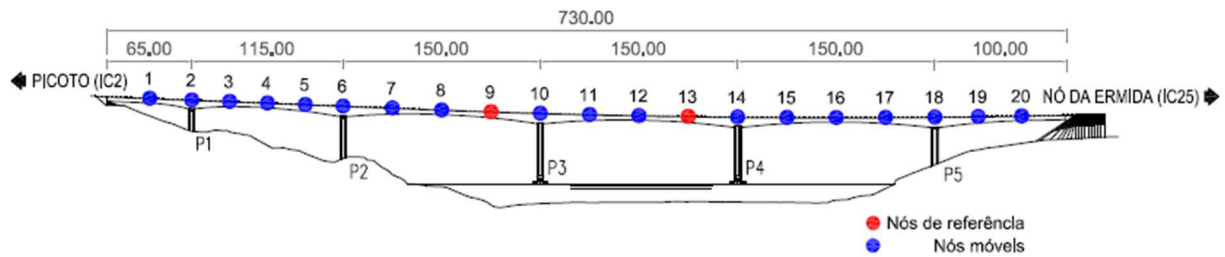


Figura 4.7 – Localização dos pontos de medição ao longo dos vãos

Na imagem apenas são visíveis 20 pontos, correspondendo o 21º e o 22º a medições efetuadas nas mesmas secções dos pontos 9 e 13 respetivamente, mas do lado contrário do tabuleiro, permitindo assim a eventual identificação de modos de torção (estes modos podem ser detetados quando os sensores referentes à mesma secção do tabuleiro estiverem em oposição de fase no seu movimento vertical). Os pontos de medição apresentados na Figura 4.6 encontram-se situados de tal maneira que cada vão fica dividido em troços iguais. Como apenas se utilizaram 6 estações de medição, foi necessário recorrer a vários “setups” para uma caraterização completa da estrutura, sendo que em cada um se monitorizaram os seguintes pontos para o tabuleiro de jusante (Quadro 4.2):

Quadro 4.2 – Posicionamento das várias estações nos diferentes “setups”

Setup	Estação 1	Estação 2	Estação 3	Estação 4	Estação 5	Estação 6
1	1	4	3	2	13	9
2	5	8	7	6	13	9
3	21	12	11	10	13	9
4	22	16	15	14	13	9
5	17	20	19	18	13	9

Como se pode ver, as estações 5 e 6 correspondem aos sensores de referência, monitorizando continuamente os pontos 13 e 9 respetivamente. As medições no tabuleiro de montante foram efetuadas de maneira semelhante, mas com as estações a movimentarem-se em sentido contrário (ou seja, a Estação 1 começou no ponto 17 e terminou no 1º). De seguida, apresenta-se na Figura 4.8 como exemplo as acelerações obtidas para a estação de medição 5 no 3º “setup” realizado no tabuleiro de jusante:

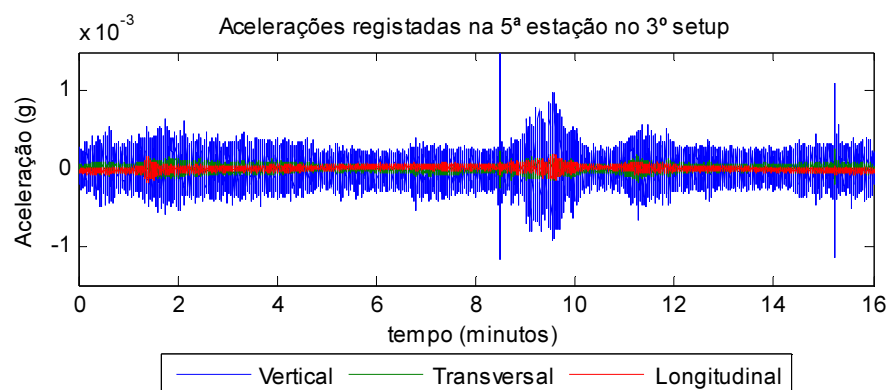


Figura 4.8 – Acelerações registadas na 5ª estação de medição no 3º “setup”

As séries obtidas foram analisadas segundo os métodos identificados previamente como “Peak-Picking”, “EFDD” e “SSI-Cov” para obtenção de modos e frequências de vibração, ficando a estimativa dos respetivos amortecimentos restringida aos dois últimos devido aos fracos resultados obtidos pelo primeiro, mesmo quando se utilizaram dados simulados artificialmente.

#### 4.3.1. MÉTODO DA SELEÇÃO DE PICOS (“PEAK-PICKING”)

Numa primeira fase, as séries foram divididas segundo as três direções para as quais foram obtidas (longitudinal, transversal e vertical) sendo cada um dos casos analisados separadamente. Além disso, e como a frequência utilizada na medição é francamente superior à necessária para a análise pretendida, foi efetuado um estudo inicial que permitisse identificar claramente as frequências interessadas, utilizando para isso janelas de Hanning com um “overlapping” de 50% e 2048 pontos (e portanto uma resolução em frequência de  $1/T = 1/(2048 \cdot 0.01) = 0.0488 \text{ Hz}$ ). De seguida, apresentam-se na Figura 4.9 os resultados obtidos para o ANPSD relativo a acelerações verticais e transversais do tabuleiro de jusante:

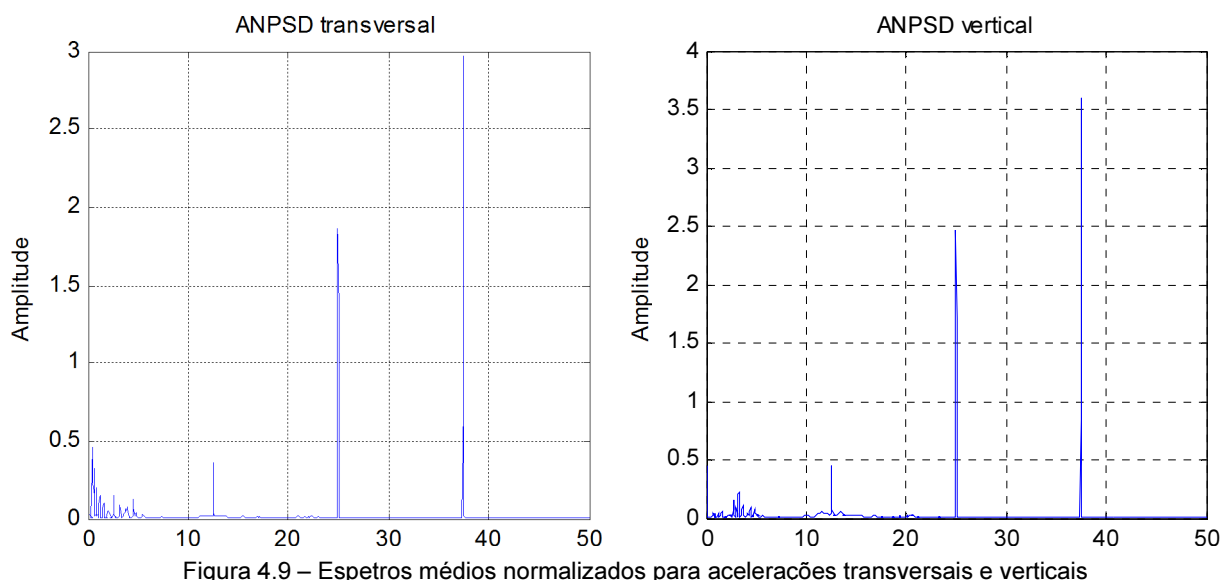


Figura 4.9 – Espectros médios normalizados para acelerações transversais e verticais

Como se pode ver, um número muito significativo de modos encontram-se para frequências inferiores a cerca de 10 Hz, pelo que se procedeu a uma decimação (redução da frequência) de ordem 4, que permitiu passar de 100 Hz para 25 Hz e, portanto, uma correta identificação de frequências até cerca de  $0.8 \cdot 25/2 = 10 \text{ Hz}$ , reduzindo de forma significativa o esforço de cálculo.

#### *Movimento Longitudinal*

A identificação do 1º modo de vibração longitudinal, apesar da sua importância para análises como a sísmica, nem sempre é fácil de realizar devido aos baixos níveis de excitação a que a estrutura se encontra sujeita num ensaio de vibração ambiental. A partir das séries de acelerações de ambos os tabuleiros, obtiveram-se os espectros médios normalizados que se apresentam na Figura 4.10:



Como se pode constatar, os dois tabuleiros exibem quatro componentes significativas para frequências entre cerca de 1.5 Hz e 2 Hz, mas que, como se verá, são coincidentes com picos dos espectros de acelerações verticais, cuja solicitação é muito mais intensa. O pico existente na frequência de 1 Hz apareceu consistentemente em todas as séries temporais, não representando nenhum modo de vibração e tendo origem no funcionamento dos sensores utilizados. Este pico aparecerá ainda nalgumas análises, tendo sido removido manualmente noutras.

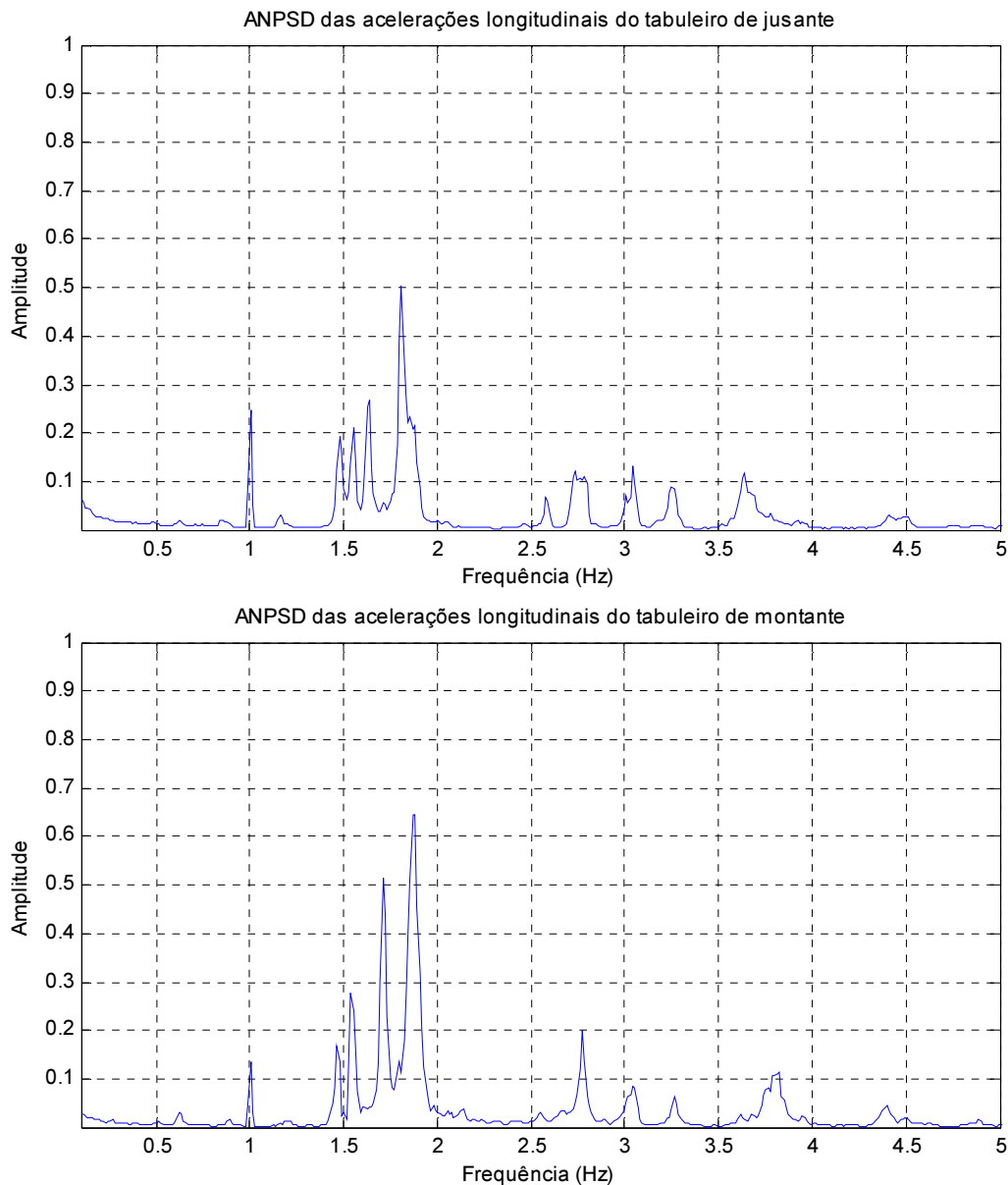


Figura 4.10 – ANPSD das acelerações longitudinais nos dois tabuleiros

### *Flexão Transversal*

A partir das séries geradas após re-amostragem foram novamente obtidos os gráficos já apresentados na Figura 4.9., que agora são alcançados com uma resolução em frequência de 0.0122 Hz e se apresentam de seguida na gama de frequências interessada e escala logarítmica (Figura 4.11):

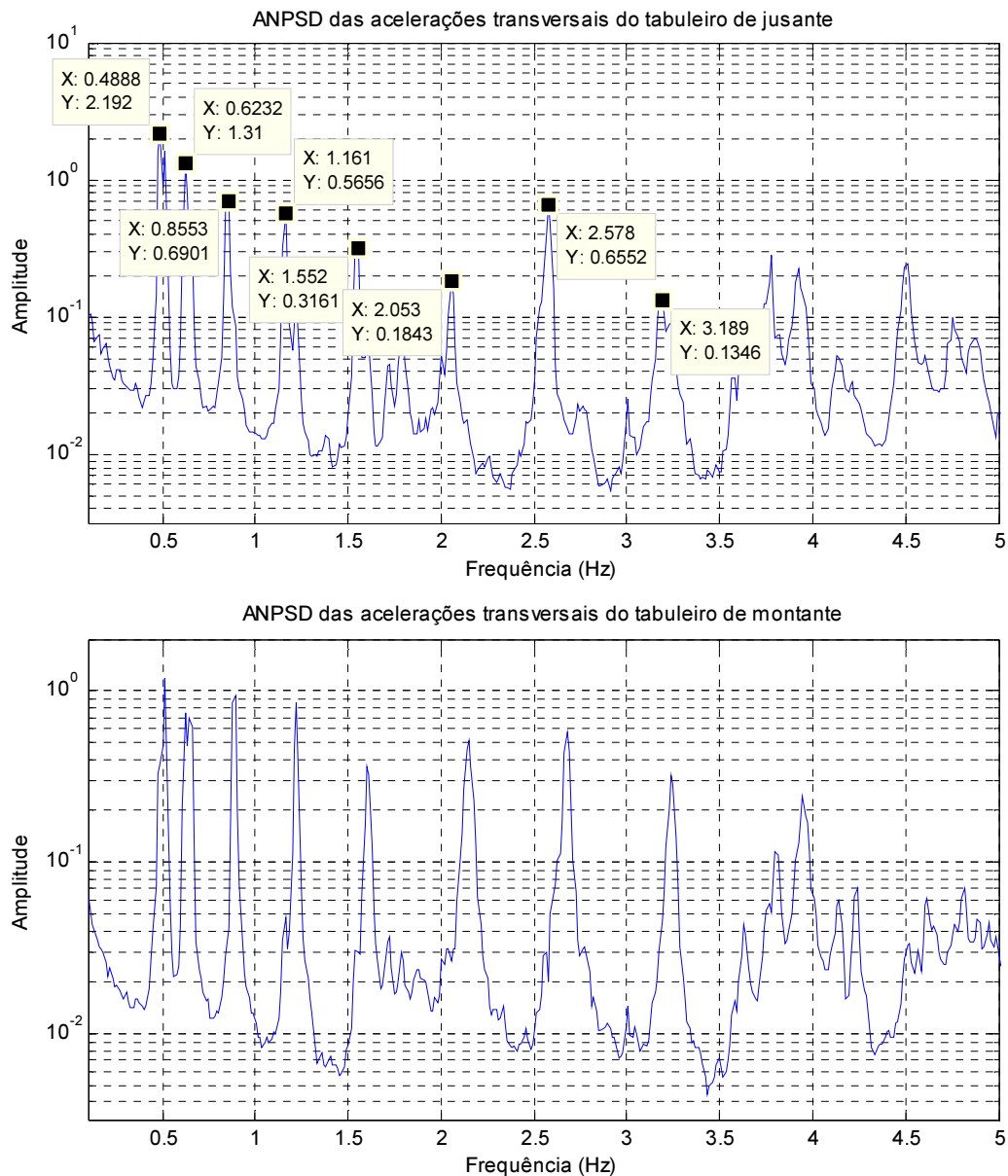


Figura 4.11 - ANPSD das acelerações transversais nos dois tabuleiros

Uma maneira eficaz de confirmar que as frequências identificadas correspondem de facto a modos próprios da estrutura passa por analisar as configurações modais que lhes estão associadas. Como se adotou dois sensores de referência, então, da matriz dos espectros, há duas colunas completamente caracterizadas ao longo dos vários “setups”. De forma a melhorar as estimativas dos modos, calculou-se a função de transferência entre cada ponto e o sensor de referência cuja ordenada fosse superior em cada frequência avaliada de maneira a reduzir o impacto do ruído. Além disso, e como por vezes a fase de um determinado ponto não é conhecida com grande rigor, quer devido a perturbações nas medições, quer devido a alguma falha na sincronização dos sensores, programou-se uma folha de EXCEL que permitisse, de forma mais interativa do que as rotinas de MATLAB, avaliar cada configuração modal obtida, em função de uma determinada tolerância para a avaliação da fase de cada ponto, que se exemplifica na Figura

4.12 para o 3º modo (os pontos vermelhos representam os sensores de referência e os pontos verdes a posição dos pilares):

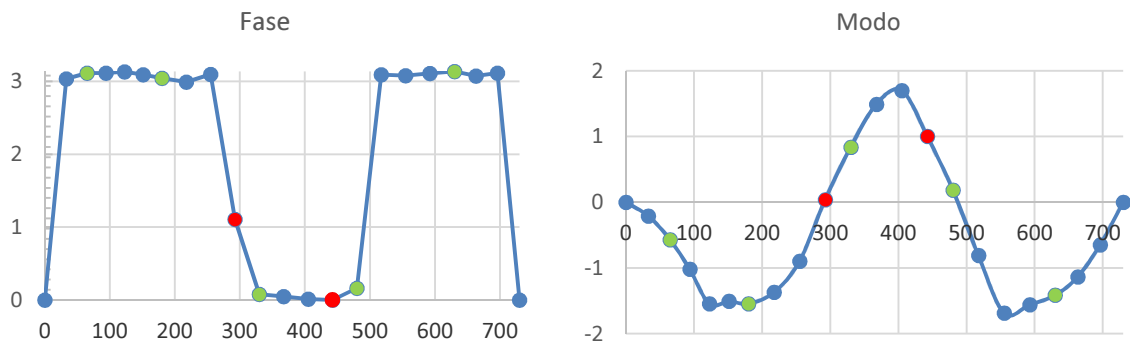


Figura 4.12 – Avaliação da fase de cada ponto para o 3º modo identificado ( $f=0.855$  Hz)

Como se pode constatar, os valores mais dúbios estão associados a pontos de ordenada praticamente nula, e, portanto, para as quais a avaliação da sua fase perde significado. Da avaliação das restantes frequências identificadas, é então possível obter as seguintes configurações modais (as frequências indicadas referem-se ao tabuleiro de jussante) presentes na Figura 4.13:

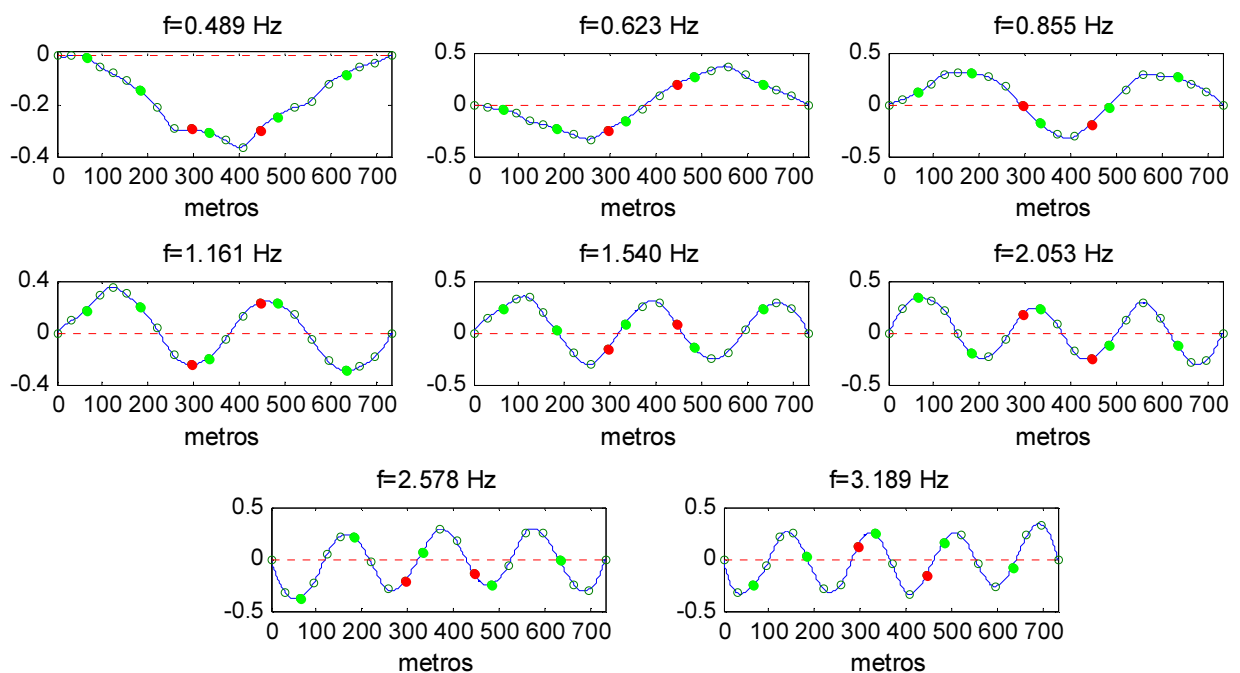


Figura 4.13 – Esboço (em planta) dos modos transversais identificados experimentalmente

A partir destes resultados, é possível perceber que as frequências identificadas estão associadas as configurações expectáveis (e avançadas pelo modelo numérico) dando assim validade às estimativas obtidas.

*Flexão Vertical*

Se se aplicar o mesmo método às séries temporais de acelerações verticais, obtém-se os seguintes gráficos para os espectros de potência médios normalizados (Figura 4.14):

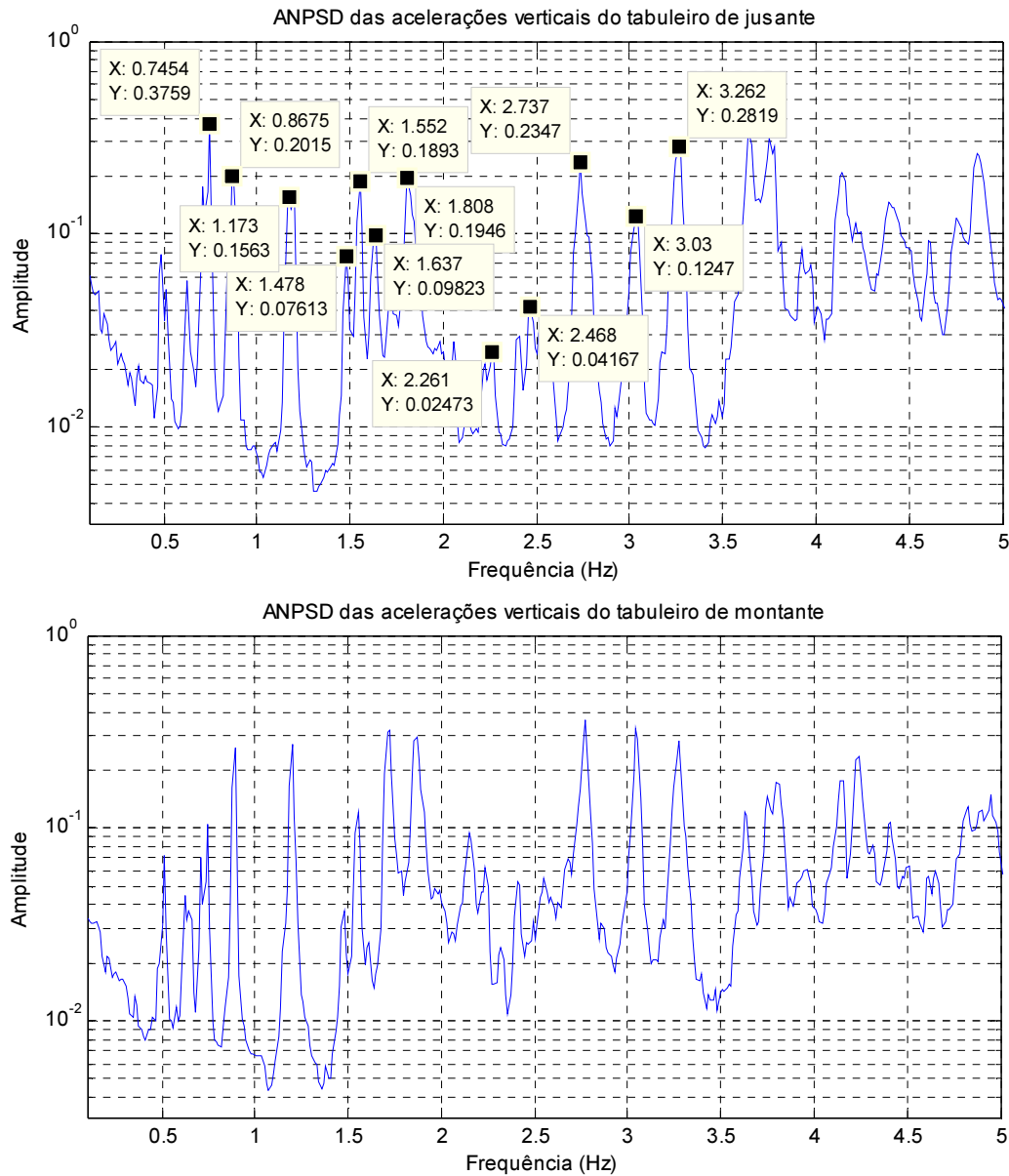


Figura 4.14 – ANPSD das acelerações verticais nos dois tabuleiros

Mais uma vez, calcularam-se os modos de vibração associados a cada uma das frequências identificadas pelo procedimento já descrito, tendo-se obtido as estimativas apresentadas na Figura 4.15 (as frequências apresentadas referem-se novamente ao tabuleiro de jusante):

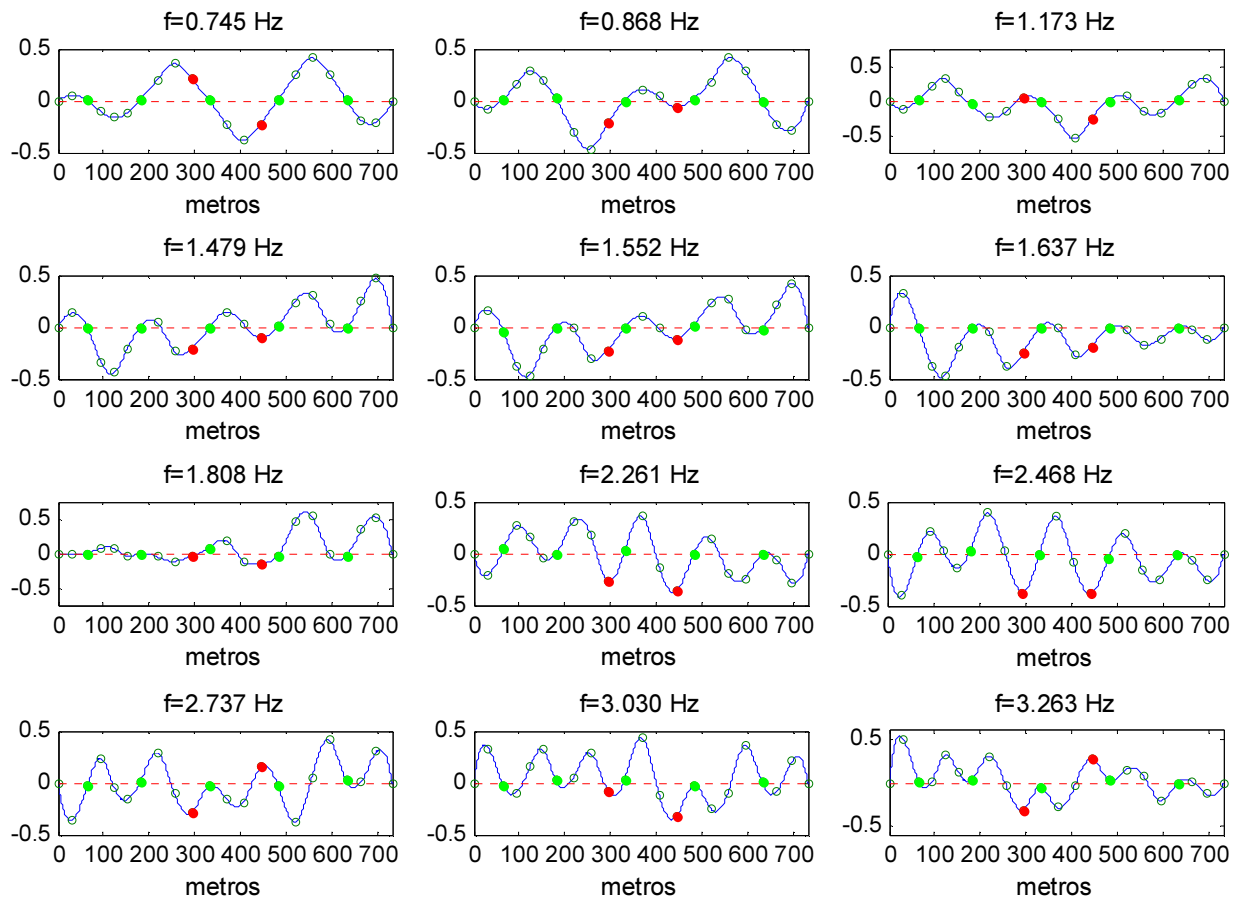


Figura 4.15 – Esboço (em alçado) dos modos verticais identificados experimentalmente

Como registado para a flexão transversal, os modos obtidos dão confiança às estimativas de frequências efetuadas já que se correlacionam bem com os resultados obtidos do modelo numérico. Além disso, é possível identificar 2 picos em cada um dos tabuleiros para frequências exatamente iguais às duas primeiras identificadas para a flexão transversal, e que, quando representadas em alçado, por si só não traduzem uma configuração realista. Tal constatação poderia revelar uma dependência nessas frequências entre modos verticais e transversais, que dado o desenvolvimento em planta perfeitamente reto da estrutura não era expetável. De facto, se se avaliar os “setups” em que foram medidos ambos os lados do mesmo tabuleiro na mesma secção (sensores (9 e 21) e (13 e 22)), constata-se que estes se encontram em oposição de fase, concluindo-se que os picos existentes nestas frequências revelam não um modo conjunto de flexão transversal e vertical, mas antes que os modos previamente identificados como puramente de flexão transversal envolvem também uma componente importante de torção do tabuleiro. Outro aspeto interessante passa pela coincidência entre os picos da análise longitudinal com alguns picos da análise vertical, que, como já havia sido avançado, representarão um modo com ambas as componentes, dando-se neste trabalho primazia à representação vertical do movimento do tabuleiro. Por último, é de notar a semelhança encontrada entre os modos associados a alguns picos (por exemplo, entre a 4ª e 5ª representação), que levanta a possibilidade de nos encontrarmos perante um de dois cenários:

- As configurações obtidas estão efetivamente associadas a modos distintos, cujas diferenças se dão em pontos não monitorizados (por exemplo, movimento das consolas distinto)

- As configurações obtidas traduzem o mesmo modo, que pode aparecer com diferentes frequências devido a diferentes condições fronteira da estrutura (de facto, se a excitação não for suficientemente elevada, as ligações entre tabuleiro e pilares têm um funcionamento muito mais próximo de elementos construídos em continuidade do que de ligações que possibilitam o movimento relativo, uma vez que a ação não é suficiente para vencer o atrito aí existente)

Procurando perceber em que caso se enquadra os dados obtidos, criou-se um mapa (Figura 4.16) que para cada “setup”, permitisse distinguir os valores mais elevados dos mais baixos através de um esquema de cores (sendo a amplitude crescente do verde para o vermelho). Assim, analisando a progressão das manchas associadas aos diferentes modos nos vários “setups”, poderá ser possível retirar ilações sobre o seu comportamento ao longo de toda a monitorização.

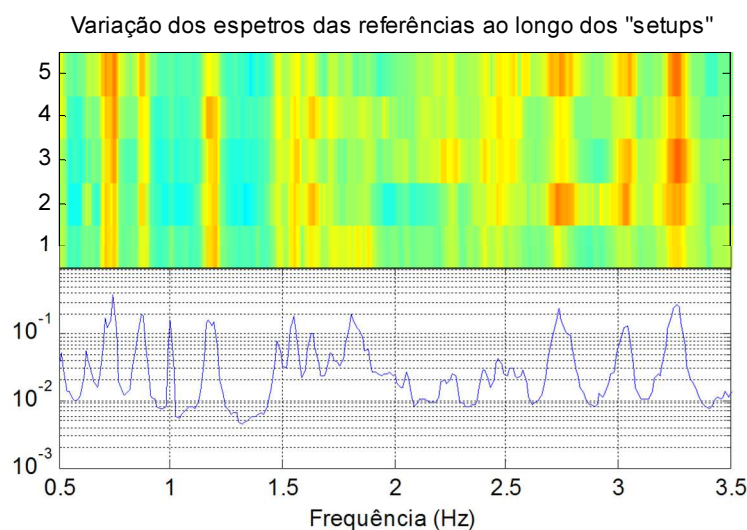


Figura 4.16 – Avaliação da variação dos valores dos espetros ao longo dos “setups”

Antes de qualquer observação, é importante ter em conta que, mesmo após a normalização efetuada, o valor dos picos não é constante ao longo dos vários “setups”. Posto isto, e como se pode ver, os alinhamentos associados aos 3 primeiros e aos 3 últimos modos aparecem razoavelmente bem definidos e de forma constante ao longo dos vários “setups”, sendo as restantes zonas de mais difícil análise. De facto, se se atentar na área compreendida entre os 1.5 Hz e 2.5 Hz, constata-se que os modos aí situados aparecem de forma muito mais intermitente e mal definida nos vários “setups”, podendo tal ficar a dever-se a frequências menos excitadas durante o ensaio, ou eventualmente, a alterações da intensidade da mesma ao longo do tempo, levando por ventura a estrutura a comportar-se de forma distinta, por exemplo ao nível da ligação tabuleiro-pilares. Esta constatação será importante em conclusões futuras deste trabalho.

Apesar das dificuldades de identificação de alguns modos, obtiveram-se frequências associadas a um número significativo de modos de vibração, que podem ser caracterizados, de acordo com a sua componente dominante, como transversais ou verticais. De seguida, resumem-se as frequências identificadas, bem como a comparação entre os valores obtidos para os dois tabuleiros, comparação essa que não será efetuada na apresentação dos próximos métodos, ficando a sua discussão reservada para o ponto 4.5. No entanto, e sendo estes os primeiros resultados obtidos para o caso de estudo, julgou-se conveniente apresentar desde já uma breve comparação entre os dois cenários (Quadro 4.3):

Quadro 4.3 – Principais frequências identificadas

Modo	Tabuleiro Jusante		Tabuleiro Montante		Razão entre tabuleiros (%) $\left(\frac{f_{montante}}{f_{jusante}} - 1\right)$
	Frequência (Hz)	Tipo de modo	Frequência (Hz)	Tipo de modo	
1	0.489	Transversal	0.513	Transversal	4.91
2	0.623	Transversal	0.623	Transversal	0
3	0.745	Vertical	0.745	Vertical	0
4	0.855	Transversal	0.892	Transversal	4.33
5	0.868	Vertical	0.892	Vertical	2.76
6	1.161	Transversal	1.222	Transversal	5.25
7	1.173	Vertical	1.198	Vertical	2.13
8	1.479	Vertical	1.478	Vertical	-0.88
9	1.540	Transversal	1.601	Transversal	3.96
10	1.552	Vertical	1.552	Vertical	0
11	1.637	Vertical	1.711	Vertical	4.52
12	1.808	Vertical	1.870	Vertical	3.43
13	2.053	Transversal	2.138	Transversal	4.14
14	2.261	Vertical	2.236	Vertical	-1.11
15	2.468	Vertical	2.554	Vertical	3.48
16	2.578	Transversal	2.676	Transversal	3.80
17	2.737	Vertical	2.774	Vertical	1.35
18	3.030	Vertical	3.043	Vertical	0.43
19	3.189	Transversal	3.250	Transversal	1.91
20	3.263	Vertical	3.275	Vertical	0.37

Um aspeto que se pode desde já destacar consiste na variação de resultados entre os 2 tabuleiros. De facto, e salvaguardando algumas exceções, as frequências identificadas para o tabuleiro de montante tendem a ser ligeiramente mais altas do que as do tabuleiro de jusante. Tal facto poderá ser explicado por um rigidez ligeiramente superior desse lado, visto os pilares, sobretudo o primeiro, serem tendencialmente mais curtos.

## 4.3.2. MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA (VERSÃO MELHORADA)

Apesar do desenvolvimento em planta da estrutura se dar segundo um alinhamento reto, o que permitiria manter a divisão entre os diferentes tipos de acelerações para aplicação deste método (tal poderia ser feito sem prejuízo dos resultados já que as configurações modais transversais e verticais são independentes, à exceção do efeito de torção, como foi avançado pelo método anterior), optou-se por tratar, numa primeira fase, as acelerações transversais e verticais em conjunto, dobrando assim a dimensão da análise dos dois tabuleiros, mas resolvendo apenas um problema de identificação por cada. Utilizando a mesma frequência de amostragem do método anterior (25 Hz), construiu-se e decompôs-se em valores singulares a matriz dos espetros da resposta, que, como foram adotados dois sensores de referência, tem agora dimensão  $44 \times 4$  para cada análise efetuada. De seguida apresentam-se na Figura 4.17 os gráficos para frequências até 4 Hz obtidos a partir das várias séries temporais, intervalo que já se viu incluir os principais modos da estrutura:

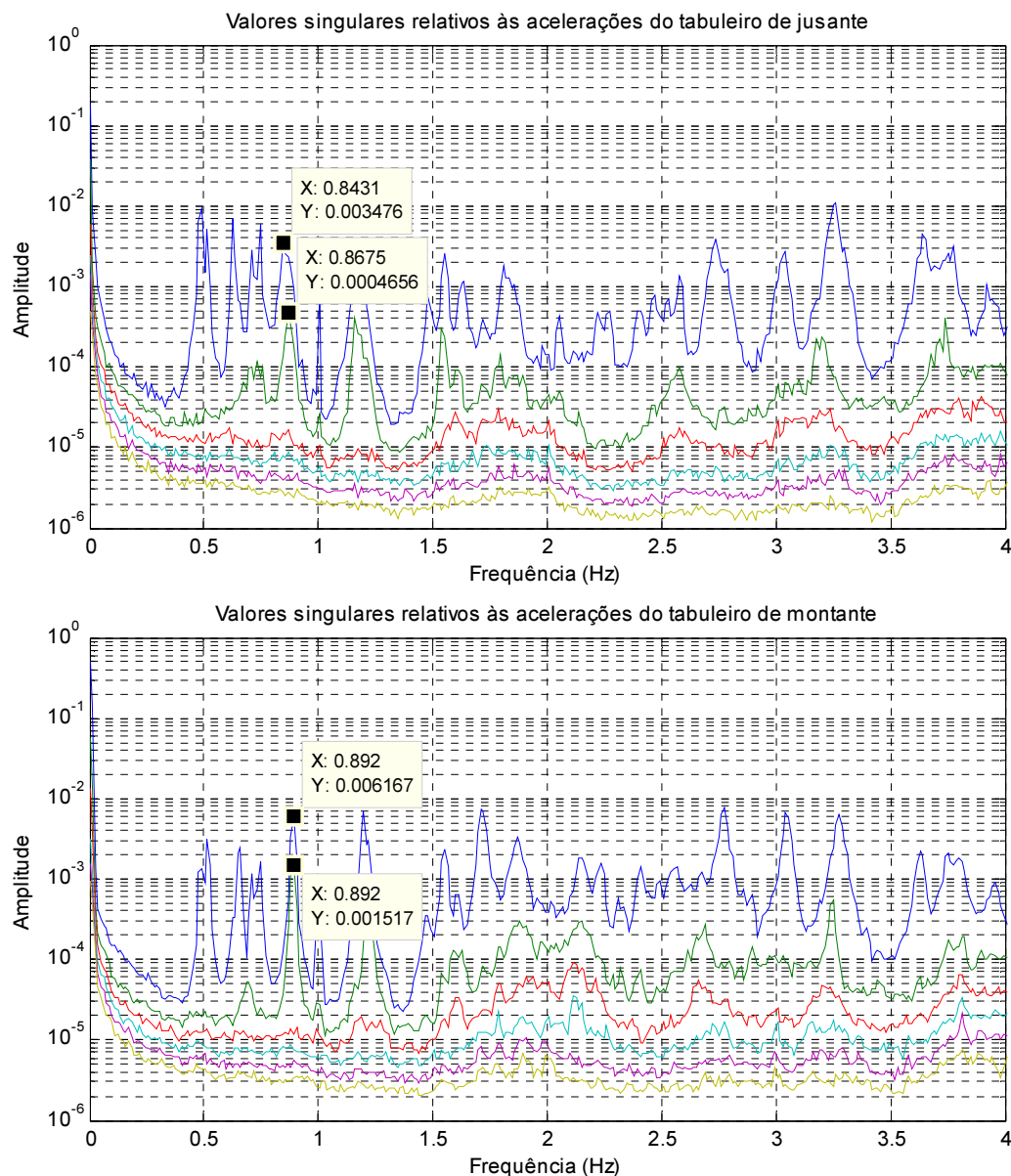


Figura 4.17 – Valores singulares das acelerações dos tabuleiros avaliadas em conjunto



Como se pode ver, e ao contrário do método anterior, o EFDD consegue identificar modos com frequências próximas, o que é observável por exemplo na vizinhança de 0.8 Hz (indicado na Figura 4.17), em que aparecem 2 valores singulares relevantes. Se se analisar a configuração modal que lhes está associada, obtém-se (Figura 4.18):

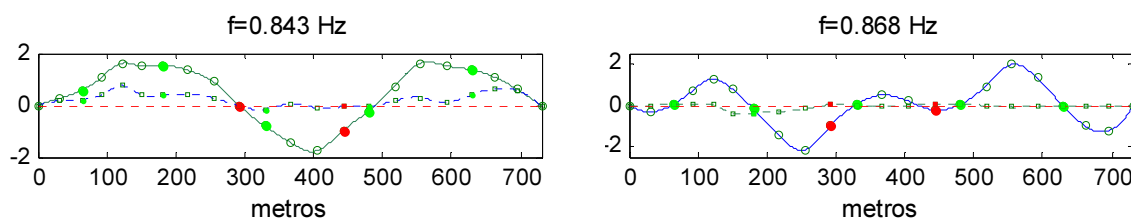


Figura 4.18 – Esboço de dois modos com frequências próximas (em planta a verde e em alçado a azul)

Pela análise da figura acima exposta facilmente se percebe que este método consegue identificar frequências próximas de uma forma que o método da seleção de picos não permitiria, fornecendo ainda boas estimativas das configurações modais que lhes estão associadas (mais uma vez, note-se a independência entre os modos verticais e transversais bem patente quando se confronta a vista em alçado e em planta para uma determinada frequência).

No entanto, o tratamento dos dados em simultâneo torna mais difícil isolar claramente os picos em cada “setup”, devido à maior densidade do gráfico, necessários para uma estimativa o mais correta possível do coeficiente de amortecimento modal. Assim sendo, e tendo-se demonstrado já uma das vantagens deste método em relação ao anterior, no seguimento deste trabalho tratar-se-á os dados em separado, procurando assim obter melhores estimativas desta grandeza.

### *Flexão Transversal*

A partir das séries de acelerações transversais obtiveram-se então os seguintes gráficos da variação dos valores singulares relativos aos dois tabuleiros (Figura 4.19):

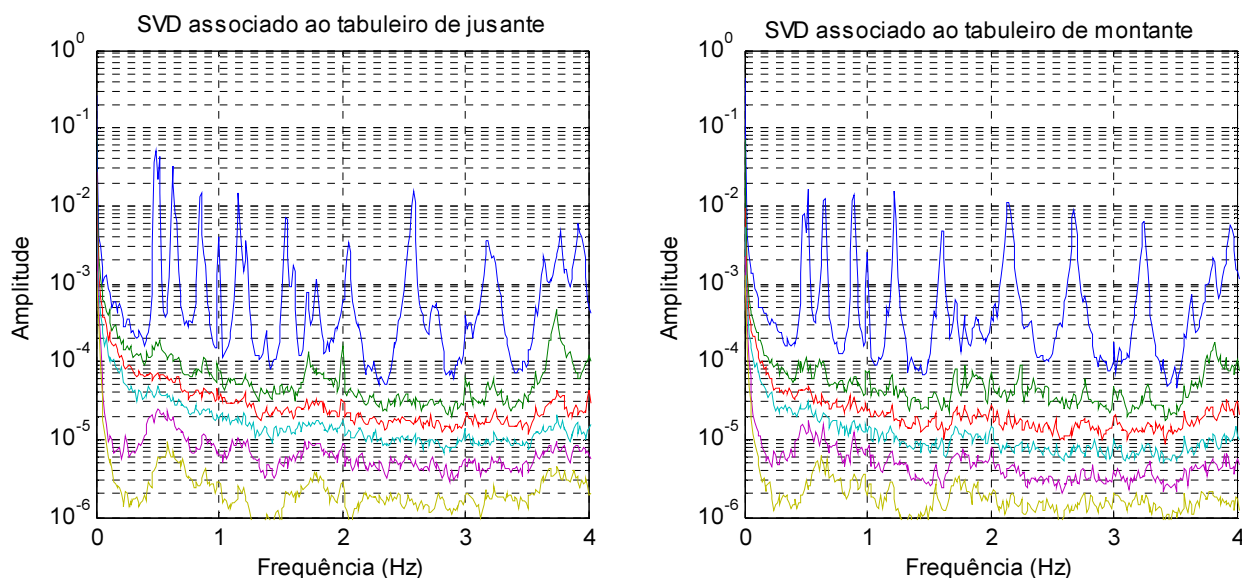


Figura 4.19 – Valores singulares associados unicamente às acelerações transversais de cada tabuleiro

Para seleccionar os pontos a considerar para o cálculo da função de auto-correlação, estabeleceu-se um MAC mínimo entre os valores singulares numa determinada frequência e a frequência ressonante. No entanto, como tal operação levava por vezes à seleção de regiões de valores singulares afetas a outros modos, foi efetuada uma segunda avaliação, de forma manual, de maneira a obter apenas os pontos corretos. A título de exemplo, apresenta-se na Figura 4.20 o processo para obtenção da função de auto-correlação associada ao 2º “setup” e à segunda frequência identificada (0.623 Hz), impondo um MAC de pelo menos 0.9:

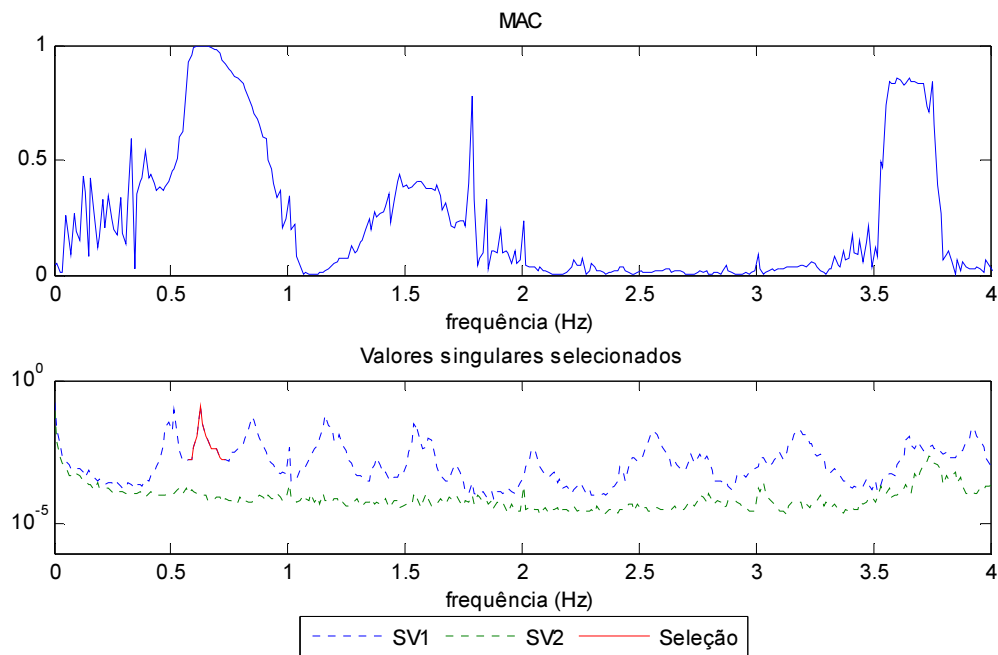


Figura 4.20 – Valores singulares seleccionados para o 2º modo de vibração transversal

Transportando os pontos seleccionados para o domínio do tempo, obtém-se então a função de auto-correlação que se apresenta na Figura 4.21, já normalizada:

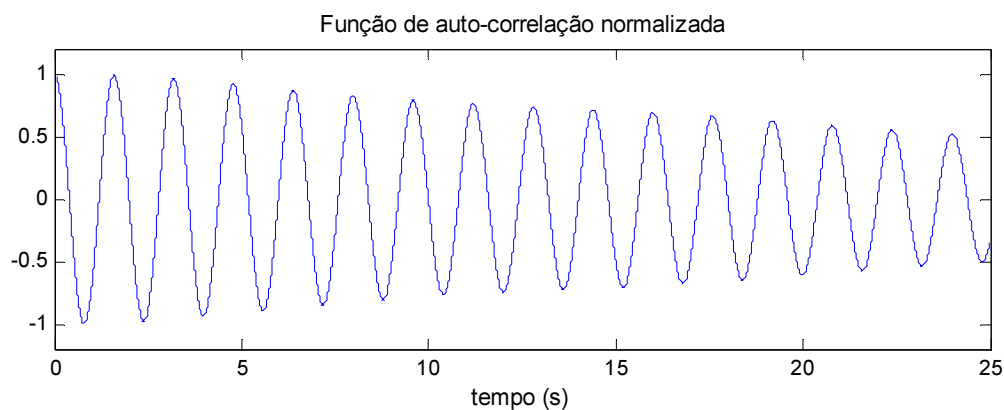


Figura 4.21 – Função de auto-correlação normalizada para 2ª frequência transversal no 2º “setup”

Como é evidente, deste processo, e tendo-se realizado 5 “setups”, obtém-se o mesmo número de estimativas para cada frequência e amortecimento. Além disso, procurou-se também ilustrar a influência da escolha do valor mínimo do MAC a considerar já que, para alguns “setups” e algumas frequências, os picos surgem mal definidos se este valor for considerado demasiado elevado. De facto, este é um aspeto no qual a sensibilidade do próprio analista tem de intervir de forma ativa, procurando definir valores razoáveis que permitam a delimitação de uma área cuja envolvente tenha o aspeto típico, dentro do possível, esperado desta funções (semelhante ao selecionado na Figura 4.20), sendo por vezes impossível obter uma função de auto-correlação que permita estimativas de confiança. A título de exemplo, ilustra-se na Figura 4.22 o processo de seleção associado à terceira frequência identificada (0.843 Hz) no 2º e 3º “setup”, impondo um MAC mínimo de 0.95 ou 0.75 respetivamente.

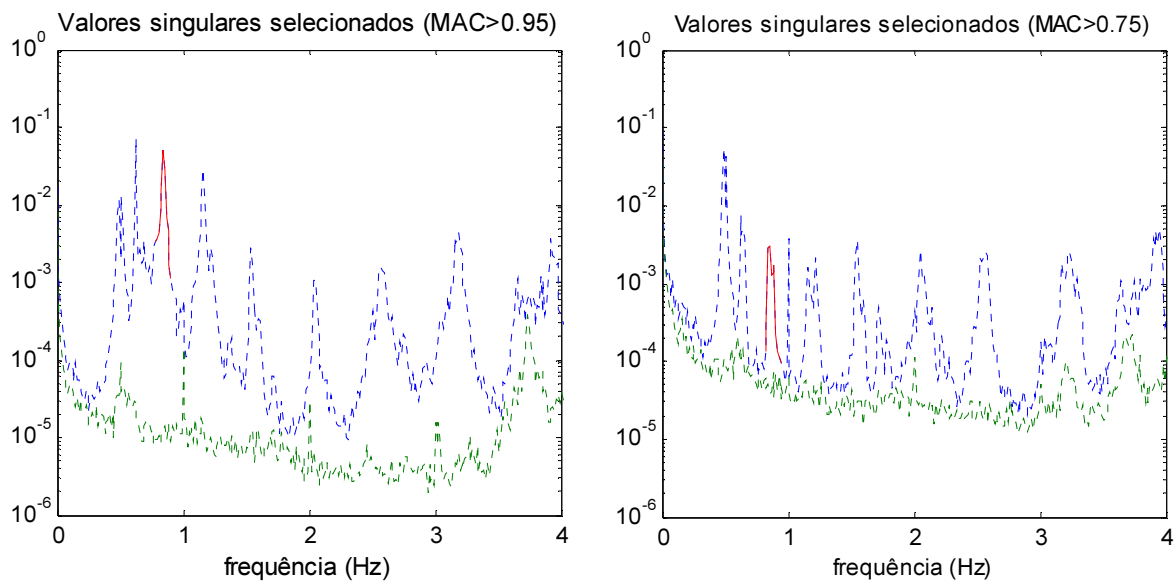


Figura 4.22 – Valores singulares seleccionados para diferentes limites mínimos do MAC (2º “setup” à esquerda e 3º “setup” à direita)

E as correspondentes funções de auto-correlação, já com a função exponencial ajustada (Figura 4.23):

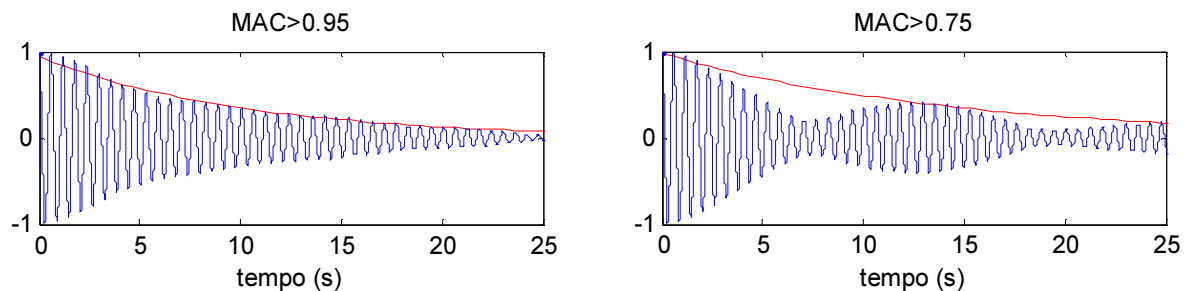


Figura 4.23 – Funções de auto-correlação e correspondente exponencial ajustada (2º “setup” à esquerda e 3º “setup” à direita)

Como se percebe, é por vezes impossível, mesmo alargando a gama de valores a considerar para o cálculo da função de auto-correlação, estimar com confiança o amortecimento a partir de uma função de auto-correlação, cuja forma pode ser significativamente distinta da teórica em resultado da influência

de mais do que uma frequência. De qualquer forma, calcularam-se numa primeira fase as frequências e amortecimentos associados aos 4 primeiros modos de vibração, com um MAC de 0.95 ou 0.75, com os resultados que se apresentam no Quadro 4.4:

Quadro 4.4 – Amortecimentos obtidos para os 4 primeiros modos de vibração em função do MAC

Modo	MAC>0.95						MAC>0.75					
	Frequência (Hz)			Amortecimento (%)			Frequência (Hz)			Amortecimento (%)		
	Min	Max	Media	Min	Max	Media	Min	Max	Media	Min	Max	Media
1	0.494	0.494	0.494	0.43	1.25	0.90	0.514	0.514	0.514	0.45	1.26	0.92
2	0.620	0.621	0.621	0.24	1.26	0.78	0.621	0.621	0.621	0.41	1.31	0.81
3	0.851	0.851	0.851	0.24	0.94	0.651	0.851	0.851	0.851	0.35	0.94	0.67
4	1.156	1.156	1.156	0.30	1.50	0.72	1.156	1.156	1.156	0.32	1.29	0.77

Como era esperado, os valores obtidos para um MAC mínimo superior tendem a ser inferiores (uma vez que aplicação da transformada inversa de Fourier a uma zona finita do espetro leva a subavaliações desta grandeza), sem no entanto esta diferença ser significativa uma vez que muitas vezes o pico se encontra bem definido em qualquer dos casos. Por fim, e tendo em conta os cuidados já mencionados na definição da zona a considerar e a eventual impossibilidade da sua correta identificação nalguns casos, calcularam-se as frequências e amortecimentos modais para os 8 espetros de potência identificados no gráfico da variação dos valores singulares associados a um mesmo número de modos de vibração distintos, que se resumem e apresentam de seguida numa tabela, indicando-se também para os vários “setups” se existe confiança (a verde) ou não (a vermelho) na estimativa obtida, considerando-se apenas os primeiros para obtenção de um valor médio (Quadro 4.5):

Quadro 4.5 – Amortecimentos obtidos para todos os modos transversais identificados

Modo	Frequência (Hz)	Amortecimento (%)					
		Setup 1	Setup 2	Setup 3	Setup 4	Setup 5	Média
1	0.494	0.40	1.14	1.00	1.00	0.86	1.05
2	0.620	0.76	0.70	1.07	0.69	1.33	0.72
3	0.851	0.43	0.93	0.70	0.82	0.84	0.86
4	1.157	0.31	0.81	0.36	1.04	0.63	0.83
5	1.544	0.55	0.57	0.63	0.43	0.86	0.65
6	2.057	0.62	0.82	1.63	0.75	0.99	0.73
7	2.573	0.53	0.40	0.77	0.66	0.31	0.41
8	3.180	0.31	1.44	0.61	0.56	1.52	1.17

Como se pode observar, obter estimativas de qualidade por este método nem sempre é possível, e nos modos superiores, como sucede no último modo identificado, mesmo os valores obtidos cuja forma da área selecionada do espectro e a função de auto-correlação anunciavam eventuais boas estimativas podem assumir variações bastante significativas. Devido à vulnerabilidade dos resultados deste método e aos critérios utilizados, optou-se por não realizar o mesmo estudo para o tabuleiro de montante, servindo o Quadro 4.5. como referência que será de seguida utilizada para comparação com os resultados do método SSI-COV, cujos valores obtidos se espera traduzam melhor e de forma mais consistente a realidade. Também por uma questão de simplicidade do trabalho, evita-se repetir as configurações modais obtidas, ficando no entanto a representação dos dois primeiros modos na Figura 4.24:

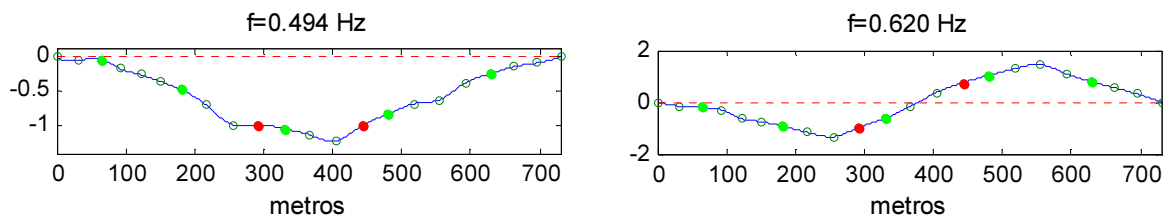


Figura 4.24 – Esboço dos 2 primeiros modos de vibração transversais identificados pelo EFDD

Além disso, e para garantir que os modos agora obtidos apresentavam configurações muito semelhantes às do método da seleção de picos, já apresentadas, compararam-se no Quadro 4.6 ambos os resultados recorrendo ao índice MAC:

Quadro 4.6 – MAC entre os modos transversais identificados pelo EFDD e pelo “Peak Picking”

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1.000	0.000	0.001	0.002	0.003	0.000	0.000	0.021
2	0.001	1.000	0.001	0.009	0.000	0.001	0.009	0.003
3	0.001	0.000	1.000	0.005	0.001	0.011	0.006	0.013
4	0.001	0.008	0.004	1.000	0.039	0.019	0.001	0.001
5	0.002	0.000	0.001	0.043	0.999	0.003	0.002	0.002
6	0.000	0.000	0.010	0.023	0.002	0.999	0.000	0.004
7	0.000	0.008	0.007	0.001	0.001	0.000	1.000	0.000
8	0.024	0.002	0.015	0.000	0.000	0.004	0.000	0.996

### Flexão Vertical

À semelhança do que foi efetuado para as séries de acelerações transversais, obteve-se os seguintes gráficos para a variação dos valores singulares em função da frequência (Figura 4.25):

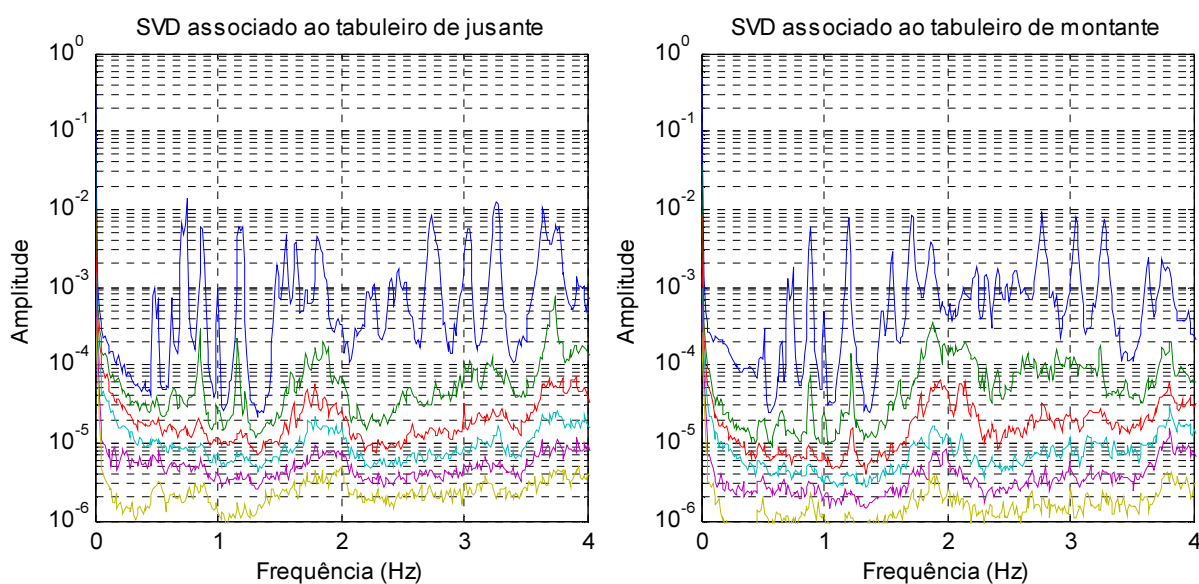


Figura 4.25 – Valores singulares associados unicamente às acelerações verticais de cada tabuleiro

Mais uma vez, chegou-se aos valores para o amortecimento modal apresentados no Quadro 4.7:

Quadro 4.7 – Amortecimentos obtidos para os modos verticais identificados

Modo	Frequência (Hz)	Amortecimento (%)					Média
		Setup 1	Setup 2	Setup 3	Setup 4	Setup 5	
1	0.743	0.15	0.64	1.48	1.44	0.61	1.18
2	0.877	1.35	0.72	0.65	0.79	0.96	0.78
3	1.183	0.32	0.76	0.68	0.90	1.44	0.83
4	1.485	-	-	-	-	-	*
5	1.549	-	-	-	-	-	*
6	1.635	-	-	-	-	-	*
7	1.813	-	-	-	-	-	*
8	2.255	-	-	-	-	-	*
9	2.444	-	-	-	-	-	*
10	2.731	0.97	1.11	1.14	0.75	0.61	0.99
11	3.035	0.36	0.46	0.45	0.46	0.34	0.42
12	3.251	0.44	0.59	0.49	0.45	0.28	0.46

\* Modos para os quais não foi possível identificar claramente a zona a considerar para o cálculo da função de auto-correlação

Para a região compreendida entre os 1.5 Hz e os 2.5 Hz, que também já tinha sido a de mais difícil análise pelo método do “Peak Picking”, simplesmente não foi possível identificar claramente as zonas a considerar para cada modo, pelo que se optou por apenas indicar a frequência obtida (valor bastante consistente mesmo considerando diferentes cenários), ficando a estimativa do amortecimento reservada para métodos mais poderosos. Além disso, também se obtiveram as configurações modais, das quais se representa de seguida as duas primeiras na Figura 4.26 e um comparativo das restantes no Quadro 4.8:

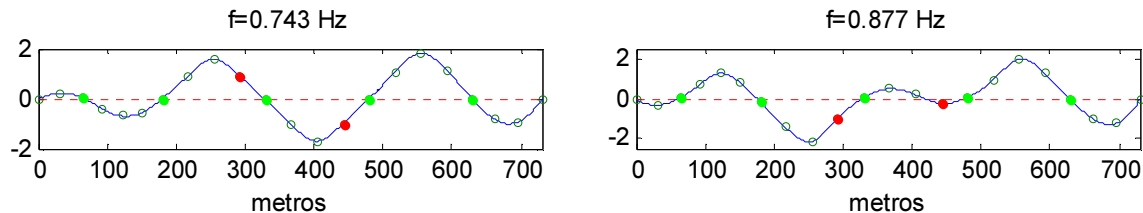


Figura 4.26 – Esboço dos 2 primeiros modos de vibração vertical identificados pelo EFDD

Quadro 4.8 – MAC entre os modos verticais identificados pelo EFDD e pelo “Peak Picking”

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.000	0.000	0.004	0.001	0.001	0.001	0.015	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.997	0.000	0.002	0.001	0.006	0.058	0.001	0.001	0.000	0.003	0.003
3	0.005	0.001	0.995	0.004	0.010	0.002	0.097	0.005	0.000	0.006	0.000	0.001
4	0.003	0.005	0.013	0.986	0.974	0.234	0.424	0.072	0.007	0.003	0.001	0.010
5	0.001	0.006	0.002	0.988	0.994	0.313	0.378	0.084	0.011	0.002	0.001	0.007
6	0.001	0.008	0.000	0.254	0.351	0.999	0.020	0.001	0.003	0.013	0.002	0.004
7	0.130	0.028	0.214	0.305	0.241	0.002	0.717	0.067	0.039	0.005	0.056	0.037
8	0.001	0.001	0.005	0.089	0.096	0.009	0.004	0.985	0.889	0.002	0.003	0.000
9	0.000	0.001	0.000	0.010	0.009	0.003	0.000	0.888	0.996	0.008	0.007	0.002
10	0.000	0.000	0.009	0.001	0.000	0.020	0.002	0.004	0.010	0.997	0.013	0.014
11	0.000	0.002	0.000	0.002	0.003	0.001	0.000	0.009	0.018	0.008	0.997	0.005
12	0.000	0.003	0.000	0.014	0.007	0.002	0.002	0.001	0.005	0.010	0.002	0.999

#### 4.3.3. MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO ESTOCÁSTICA A PARTIR DE SUB-ESPAÇOS (SSI-COV)

Como já foi visto no capítulo 3, o valor adotado para  $j_i$  condiciona à partida a ordem máxima possível alcançável para o modelo de estado ajustado. No entanto, e como também se afirmou na altura, nas estruturas reais não é possível através da análise da variação dos valores singulares da matriz de Toeplitz, identificar claramente um salto maior entre dois valores consecutivos, permanecendo assim a ordem ideal para o modelo a ajustar desconhecida. De seguida, ilustra-se na Figura 4.27 a variação dos valores singulares normalizados obtidos para ordens pares entre 2 e 100 relativos às matrizes geradas, numa primeira análise, a partir exclusivamente das séries de acelerações verticais:

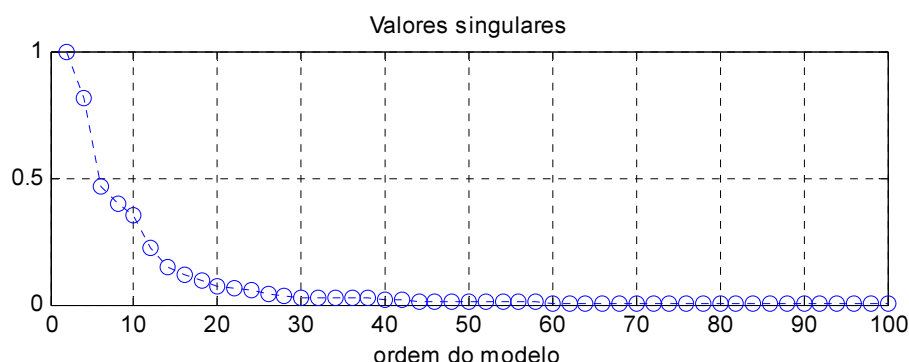


Figura 4.27 – Variação dos valores singulares em função da ordem do modelo

Como se pode ver, não é de todo evidente a ordem para a qual a estrutura fica bem caraterizada. Assim sendo, e à semelhança do que foi feito no exemplo apresentado nos capítulos anteriores, estimaram-se frequências, amortecimentos e modos de vibração para várias ordens distintas, tendo sido adotados os seguintes critérios para considerar um pólo estável:

- Variação absoluta de frequência inferior a 0.01 Hz
- Variação absoluta de amortecimento inferior a 0.1%
- MAC superior a 0.95

Além disso, e de maneira a perceber o efeito da escolha do parâmetro  $j_i$  nos resultados obtidos e não apenas na ordem máxima atingível, gerou-se a matriz de Toeplitz para diferentes valores deste parâmetro e, portanto, utilizando a informação de diferentes números de ciclos de vibração da estrutura de acordo com o Quadro 4.9 que a seguir se apresenta:

Quadro 4.9 – Caraterização das diferentes hipóteses testadas

Hipótese	$j_i$	$2 \cdot j_i - 1$	$instante_{final} (s)$	$n^o \text{ de ciclos}^8$	$n^o \text{ de ciclos}^9$	Ordem máxima
1	35	69	2.76	2	9	70
2	55	109	4.36	3	14	100
3	90	179	7.16	5	23	100
4	135	269	10.76	8	35	100

Desta análise obtiveram-se do tratamento conjunto de todos os “setups” os diagramas de estabilização que se apresentam na Figura 4.28 (note-se que apenas estão indicados os pólos estáveis para simplificar a leitura dos gráficos):

<sup>8</sup> Em relação ao período maior dos modos verticais

<sup>9</sup> Em relação ao período menor dos modos verticais



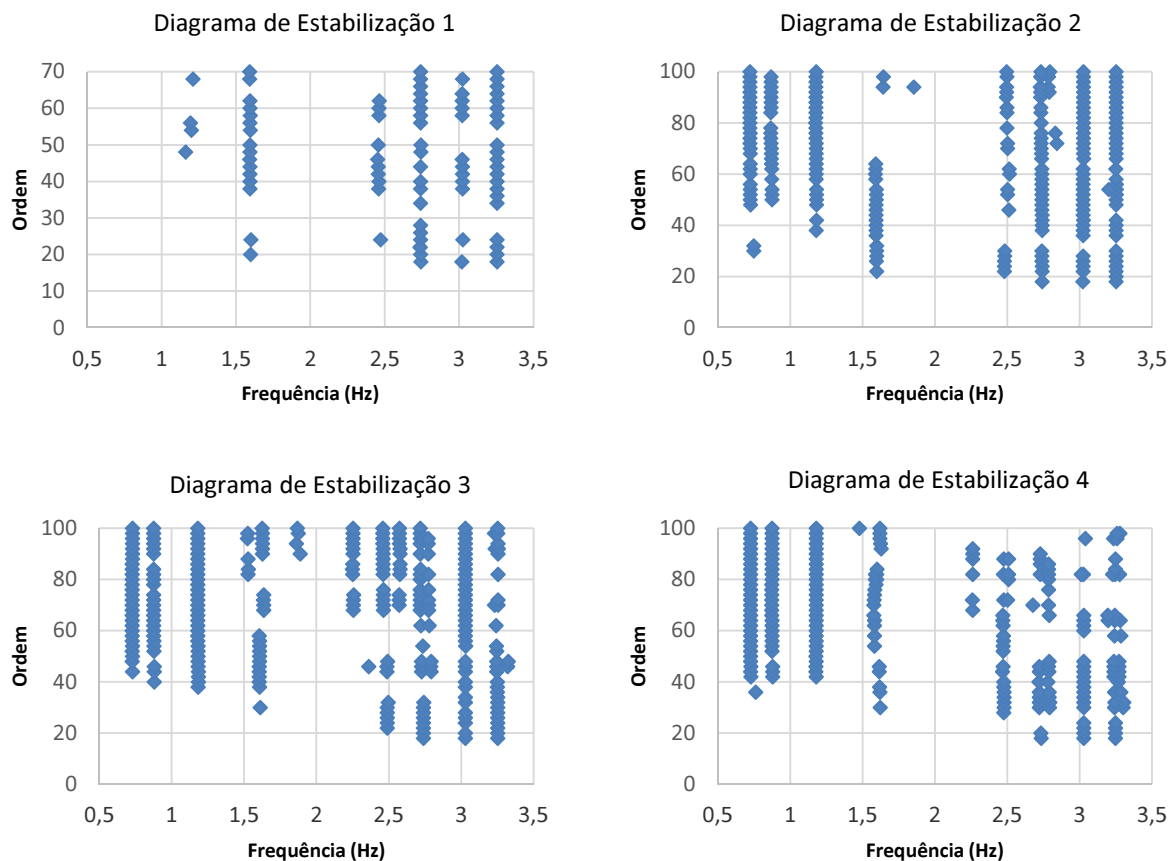


Figura 4.28 – Diagramas de estabilização obtidos para as diferentes hipóteses testadas

Como se pode constatar, um aumento da informação utilizada para a criação da matriz de Toeplitz leva a uma melhoria dos resultados obtidos até um determinado ponto, mesmo considerando a mesma gama de ordens de modelos ajustados, sendo os resultados obtidos para apenas 2 ciclos com os critérios impostos francamente insuficientes (evidentemente, poder-se-ia ajustar também os critérios de maneira obter resultados mais satisfatórios, mas o propósito do exercício acima apresentado passava por demonstrar apenas a influência da dimensão da matriz de Toeplitz adotada, tendo-se por isso mantido os mesmos constantes). No entanto, entre o diagrama 3 e 4, nota-se uma diminuição da qualidade, sobretudo nos modos mais elevados, resultado do efeito já explicado de utilizar funções de auto-correlação excessivamente longas e para as quais o erro associado aos desfasamentos temporais superiores é significativo.

Tendo selecionado a dimensão a considerar para a matriz de Toeplitz, apresenta-se na Figura 4.29 os resultados obtidos quando foram tratados simultaneamente acelerações transversais e verticais, utilizando  $j_t = 90$  (cerca de 5 períodos maiores da estrutura) e ajustando modelos para todas as ordens pares até 200 (note-se que utilizando conjuntamente as duas séries geradas a dimensão de Toeplitz permite agora ajustar modelos de ordens não superiores a 360).

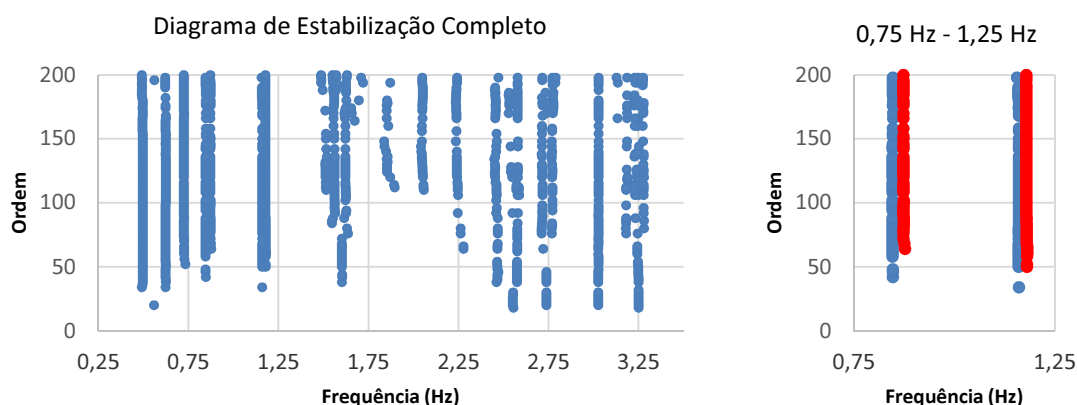


Figura 4.29 – Diagrama de estabilização – vista geral (à esquerda) e pormenor (à direita)

Como se pode ver, o método é capaz de identificar modos cujas frequências estejam próximas. De seguida, apresenta-se na Figura 4.30 os modos de vibração com frequências próximas obtidos na análise conjunta acima ilustrados.

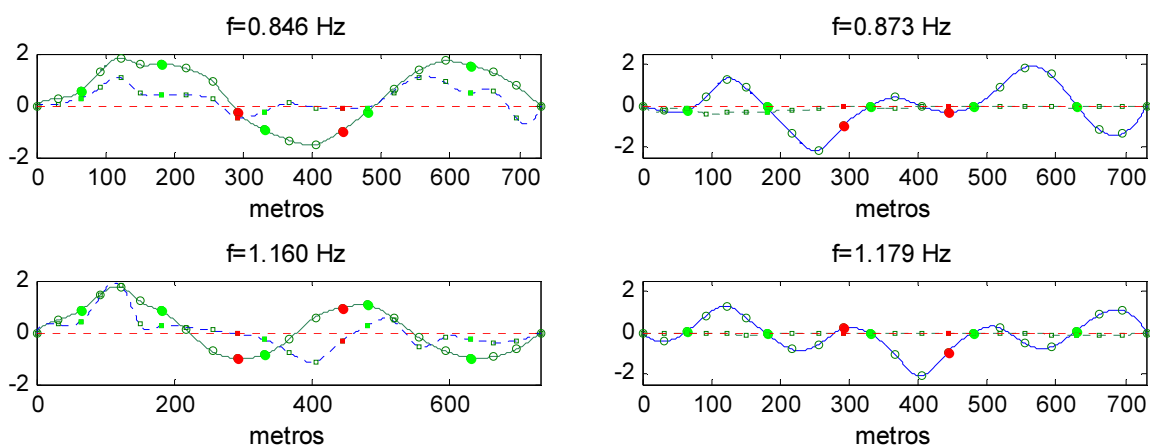


Figura 4.30 – Esboço dos modos com frequências próximas identificados (em planta a verde e em alçado a azul)

Os resultados apresentados estão de acordo com as estimativas apresentadas para os métodos anteriores, nomeadamente com os do EFDD em que também foram analisadas as séries em simultâneo. Da análise dos modos verticais (à direita na Figura 4.30.) pode-se observar a independência destes dos deslocamentos transversais, não sendo o mesmo tão evidente quando se analisam modos predominantemente transversais. Tal deve-se a dois fenómenos que foram perceptíveis nesta análise:

- Ao movimento de flexão transversal está associado um efeito de torção mais ou menos importante por parte do tabuleiro, como também já se havia registado na aplicação do método da seleção de picos (mais visível no dois desenhos de cima da Figura 4.30.)
- Devido à excitação vertical ser mais intensa, o movimento nesta direção em frequências que não são modos de vibração da estrutura têm por vezes amplitude suficiente para afetar os resultados de flexão na direção transversal, provocada por uma excitação mais suave, o que revela que o método não é capaz de separar completamente as duas direções, já que a correlação entre as respetivas excitações também não é nula (visível nos desenhos de baixo da Figura 4.30.)

Por estes motivos, e de forma a estimar o melhor possível tanto modos como amortecimentos da estrutura, a análise que de seguida se apresenta será realizada analisando as duas componentes separadamente, tal como havia sido feito nos dois métodos já apresentados. Esta decisão permitirá, se necessário, ajustar os valores das tolerâncias e da ordem da matriz de Toeplitz separadamente conforme tal ação melhor ou não os resultados obtidos

### Flexão Transversal

Para a estimativa das caraterísticas dinâmicas no sentido transversal da estrutura utilizou-se uma matriz de Toeplitz com  $j_i = 50$  (cerca de 2 ciclos maiores dos modos transversais), que se constatou ser capaz de fornecer estimativas estáveis para as frequências já identificadas (Figura 4.31):

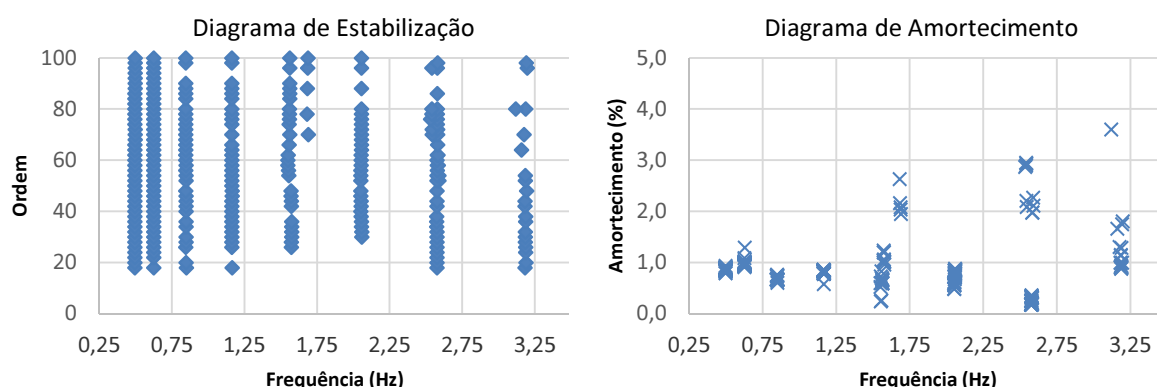


Figura 4.31 – Diagrama de estabilização para os modos transversais

Dos diagramas apresentados obtiveram-se os valores para as frequências próprias da estrutura, bem como os respetivos coeficientes de amortecimento, apresentados no Quadro 4.10 (estes últimos e tendo em conta a variabilidade dos mesmos apresentam-se como um intervalo que se considerou representativo):

Quadro 4.10 – Frequências e amortecimentos dos modos transversais identificados

Modo	Tabuleiro de Jusante			Tabuleiro de Montante		
	Frequência (Hz)	Amortecimento (%)		Frequência (Hz)	Amortecimento (%)	
		Min	Max		Min	Max
1	0.495	0.82	0.91	0.507	0.18	0.30
2	0.625	0.93	1.02	0.630	0.33	0.45
3	0.846	0.66	0.76	0.883	0.28	0.50
4	1.163	0.78	0.85	1.218	0.86	1.05
5	1.571	0.52	1.20	1.595	0.80	1.20
6	2.055	0.49	0.88	2.144	0.91	1.11
7	2.574	0.19	0.35	2.664	0.69	0.87
8	3.185	0.88	1.29	3.228	0.41	0.46

À semelhança do que foi efetuado no método da decomposição no domínio da frequência, limita-se a representação gráfica aos 2 primeiros modos (Figura 4.32), comparando-se os restantes por meio do Quadro 4.11:

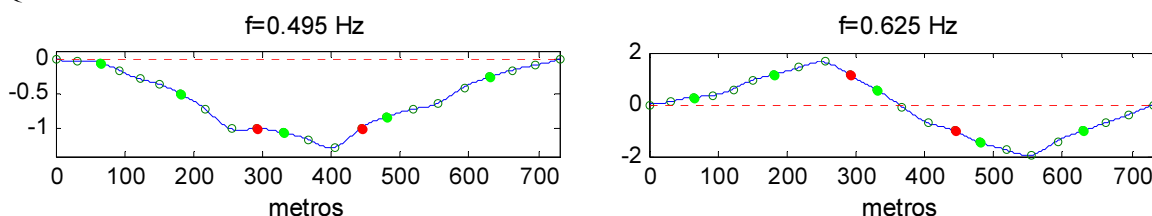


Figura 4.32 – Esboço dos 2 primeiros modos de vibração transversal identificados pelo SSI-Cov

Quadro 4.11 – MAC entre os modos transversais identificados pelo SSI-Cov e o “Peak Picking”  
(tabuleiro de jusante)

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1.000	0.000	0.001	0.001	0.003	0.000	0.000	0.021
2	0.007	0.987	0.002	0.005	0.002	0.000	0.011	0.002
3	0.008	0.000	0.983	0.010	0.008	0.014	0.004	0.006
4	0.000	0.007	0.004	0.995	0.032	0.024	0.001	0.000
5	0.008	0.000	0.001	0.019	0.968	0.025	0.001	0.006
6	0.000	0.000	0.005	0.029	0.002	0.974	0.005	0.008
7	0.001	0.000	0.017	0.001	0.000	0.001	0.964	0.000
8	0.018	0.000	0.007	0.003	0.044	0.000	0.000	0.952

Uma constatação importante passa pelas diferenças obtidas para os amortecimentos modais dos 2 tabuleiros para modos equivalentes, podendo estas dever-se sobretudo a um (ou mais) de 4 fatores:

- Intensidade do vento
- Duração das séries temporais utilizadas
- Intensidade da excitação (de certo modo relacionado com a intensidade do vento)
- Erros do próprio método

Desconhecendo-se a variação da intensidade do vento durante a realização do ensaio, e sendo a duração das séries temporais imutável visto já se terem usado todos os dados disponíveis, procurou-se perceber se havia alguma relação entre a amplitude da excitação (quantificável através da amplitude da resposta) nos amortecimentos obtidos. De facto, embora o tratamento conjunto de todos os “setups” permita realizar a análise de um só diagrama de estabilização, impossibilita uma apreciação da variabilidade das grandezas ao longo do processo, tendo-se então optado por realizar também uma análise “setup” a “setup” para os 4 primeiros modos identificados.

A quantificação da intensidade da excitação nos vários “setups”, cuja média é aproximadamente nula, foi feita utilizando o desvio padrão da série temporal associada a uma das referências como indicador do seu conteúdo energético, tendo-se obtido os resultados que se apresentam no Quadro 4.12:

Quadro 4.12 – Desvio padrão das séries amostradas ao longo dos vários “setups”

Setup	1	2	3	4	5
$\sigma_{jusante} (\times 10^{-5} g)$	1.81	4.37	2.05	1.96	2.96
$\sigma_{montante} (\times 10^{-5} g)$	9.7	4.35	4.25	2.12	1.33

Para os vários “setups” foi então aplicado o algoritmo do método SSI-COV obtendo-se tantos diagramas de estabilização quantos o número de “setups”, agrupados num só gráfico apresentado na Figura 4.33:

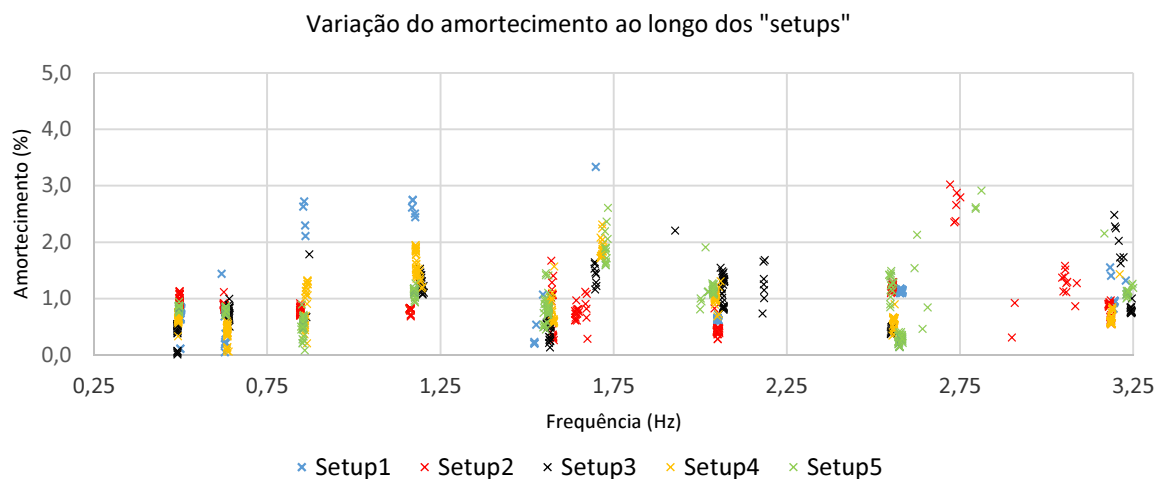


Figura 4.33 – Variação do amortecimento ao longo dos vários “setups” (tabuleiro de jusante)

Como se pode facilmente observar, o que antes era um intervalo relativamente bem definido e de amplitude curta, possui agora uma dispersão considerável de resultados dependendo do “setup” utilizado. Se para cada cenário se estabelecer um intervalo aceitável para a estimativa do amortecimento, cujo valor médio pode ser representado em função do “setup” em que ocorreu, obtém-se o gráfico apresentado na Figura 4.34 (o desvio padrão da excitação encontra-se normalizado de maneira a variar entre 0 e 1):

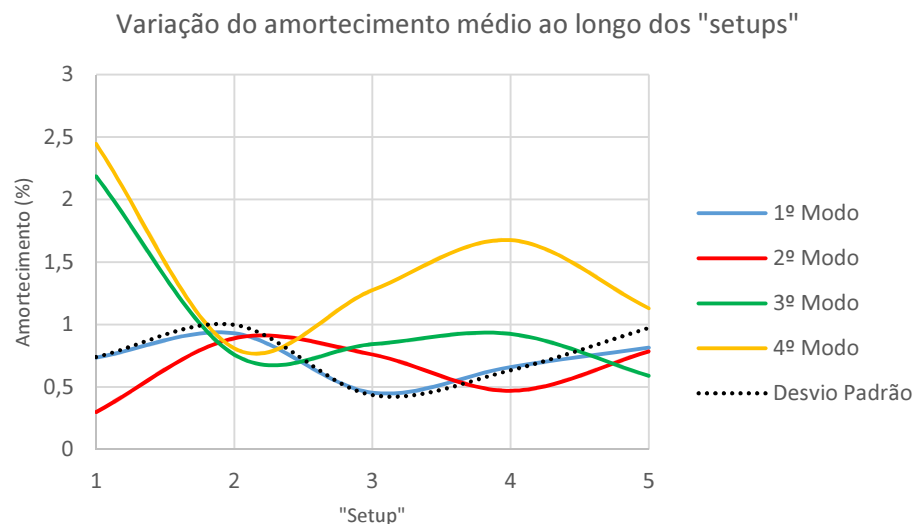


Figura 4.34 – Variação do amortecimento médio ao longo dos “setups” (tabuleiro de jusante)

Como se pode constatar, os 2 primeiros modos, ao contrário dos restantes analisados, apresentam um comportamento que pode ser bem relacionado (e, portanto, eventualmente explicado) pela variação da amplitude da excitação. Conclusão mais importante a retirar desta análise é a qualidade dos amortecimentos obtidos ser possivelmente mais baixa do que aquela que a análise conjunta anunciava. De facto, comparando as Figuras 4.31 e 4.33 fica a ideia de que o amortecimento apresentado após o tratamento conjunto pode efetivamente ter desvios significativos em relação à realidade, o que acaba por ser uma consequência inevitável de um ensaio de vibração ambiental, devendo-se, se fosse fundamental obter uma estimativa precisa do amortecimento, recorrer a outro tipo de ensaios como o de vibração livre (uma comparação dos resultados obtidos pelos 2 ensaios para estruturas nas quais ambos foram realizados pode ser encontrada na referência (Magalhães, 2010) ). Se efetuarmos a mesma análise para o tabuleiro de montante os resultados são mais uma vez pouco conclusivos, notando-se dispersões importantes durante o decorrer do ensaio, como se pode ver nas Figuras 4.35 e 4.36:

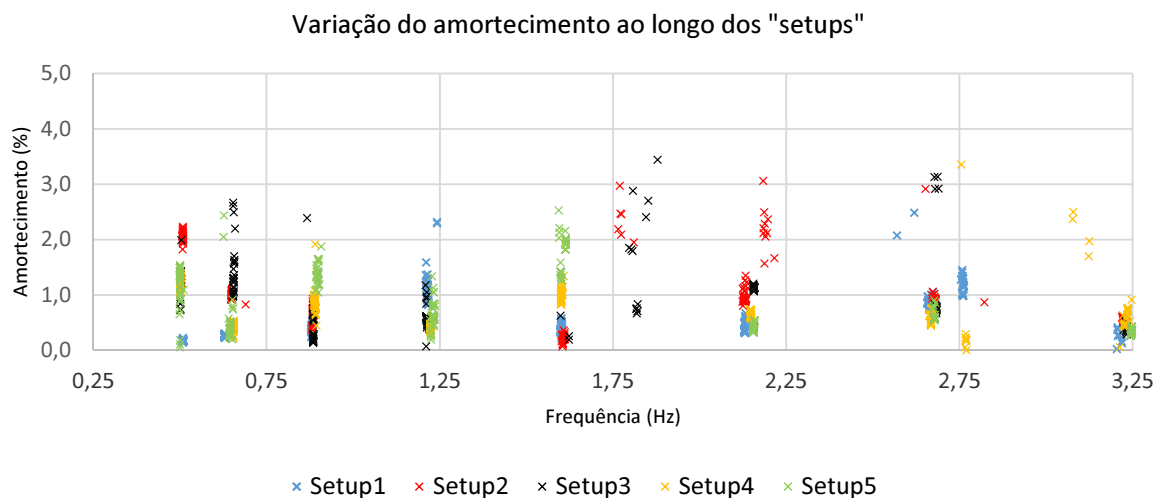


Figura 4.35 – Variação do amortecimento ao longo dos vários “setups” (tabuleiro de montante)

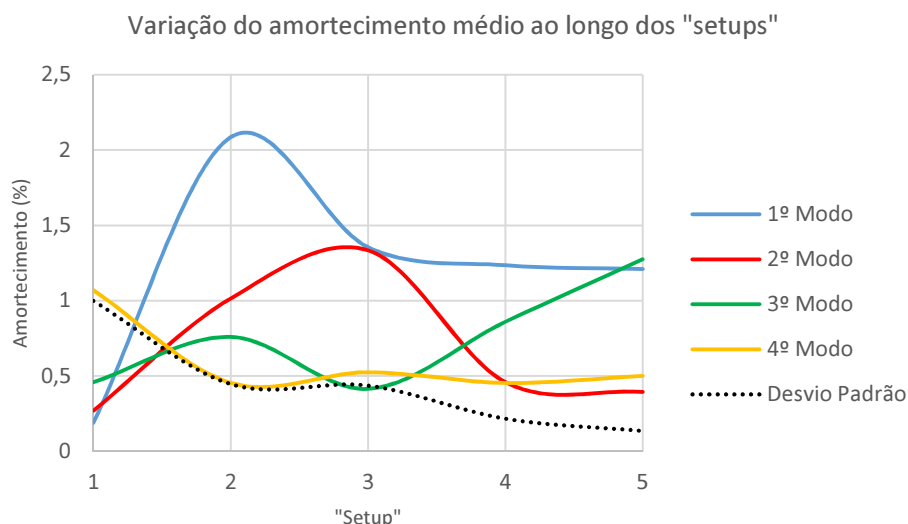


Figura 4.36 – Variação do amortecimento médio ao longo dos “setups” (tabuleiro de montante)

### Flexão Vertical

Apesar da análise já apresentada indicar que criar uma matriz de Toeplitz com  $j_i = 90$  seria suficiente para obter estimativas estáveis, constatou-se que uma correta definição de alguns modos (sobretudo situados na zona já identificada nos dois métodos já apresentados como mais perturbada – de 1.5 Hz a 2.5 Hz) e das suas características não era plenamente conseguida neste cenário. Tentando ultrapassar este problema, optou-se então por efetuar diferentes análises com diferentes parâmetros iniciais que possibilitasse abordar cada modo da melhor maneira. Para isso, separaram-se as frequências já identificadas em 3 grupos, para os quais foram conduzidas análises independentes, segundo o Quadro 4.13:

Quadro 4.13 – Hipóteses analisadas

Hipótese	$j_i$	Ordem máxima	Frequências analisadas
1	135	120	0 Hz – 1.25 Hz 2 Hz – 2.6 Hz
2	200	200	1.25 Hz – 2 Hz
3	55	100	2.6 Hz – 3.5 Hz

Cujos resultados, por se referirem a regiões que não se sobrepõem, podem ser apresentados num único diagrama como apresentado na Figura 4.37:

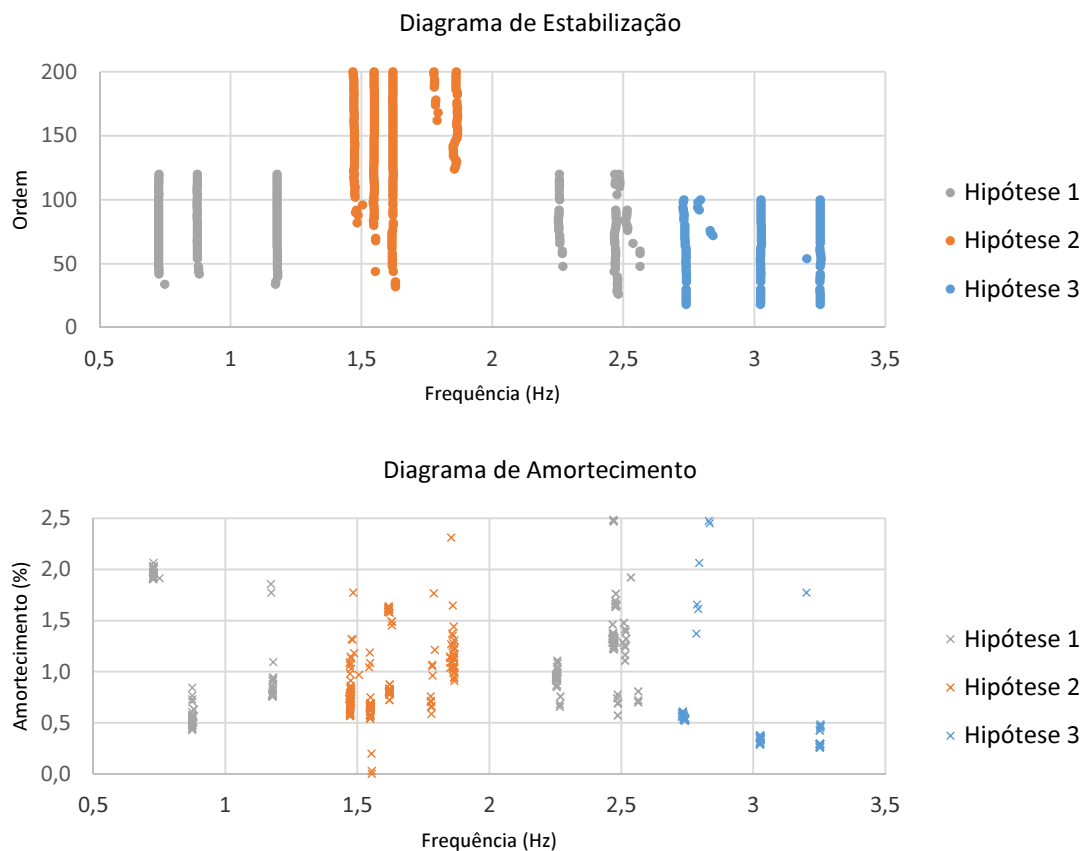


Figura 4.37 – Diagramas de estabilização para os modos verticais

A partir destes pode-se retirar novamente a informação associada às frequências e amortecimentos modais (como se pode ver no Quadro 4.14, o 4º modo de flexão vertical do tabuleiro de montante não foi possível de identificar por este método):

Quadro 4.14 – Frequências e amortecimentos dos modos verticais identificados

Modo	Tabuleiro de Jusante			Tabuleiro de Montante		
	Frequência (Hz)	Amortecimento (%)		Frequência (Hz)	Amortecimento (%)	
		Min	Max		Min	Max
1	0.727	1.91	2.03	0.738	1.43	1.60
2	0.874	0.43	0.56	0.888	0.69	0.89
3	1.179	0.76	0.85	1.192	0.87	1.10
4	1.472	0.58	0.86	-	-	-
5	1.549	0.56	0.69	1.543	0.45	0.68
6	1.621	0.78	0.88	1.708	0.52	0.74
7	1.862	0.99	1.35	1.881	0.84	1.16
8	2.256	0.85	0.96	2.226	0.60	0.83
9	2.471	1.26	1.38	2.560	0.30	0.45
10	2.730	0.56	0.61	2.760	0.58	0.71
11	3.025	0.29	0.38	3.036	0.75	0.85
12	3.252	0.25	0.30	3.270	0.65	0.80

E, para as frequências identificadas, as seguintes configurações modais (Figura 4.38) e respetiva comparação a partir do índice MAC (Quadro 4.15), salientando-se que a configuração obtida para o modo com frequência próxima de 1.87 Hz foi obtida com fraca qualidade, não tendo sido possível efetuar a sua comparação com os resultados já obtidos:

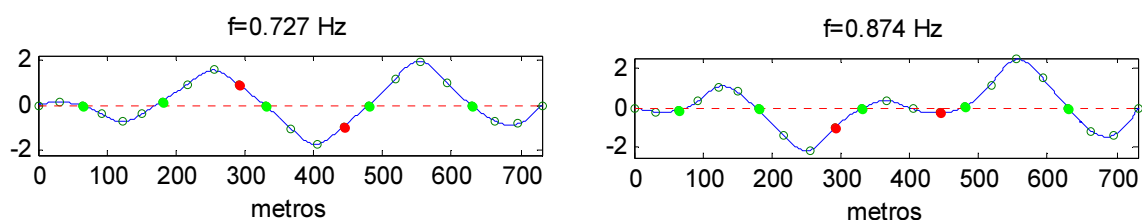


Figura 4.38 – Esboço dos 2 primeiros modos de vibração vertical identificados pelo SSI-Cov



Quadro 4.15 – MAC entre os modos verticais identificados pelo SSI-Cov e o “Peak Picking”

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.993	0.000	0.001	0.005	0.003	0.000	0.000	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.020	0.959	0.000	0.001	0.002	0.000	0.001	0.006	0.000	0.001	0.003	0.006
3	0.001	0.001	0.991	0.008	0.016	0.004	0.003	0.004	0.000	0.013	0.001	0.002
4	0.007	0.016	0.001	0.979	0.975	0.300	0.283	0.070	0.008	0.011	0.000	0.006
5	0.001	0.009	0.001	0.970	0.993	0.409	0.205	0.069	0.007	0.001	0.000	0.008
6	0.045	0.004	0.023	0.055	0.111	0.814	0.257	0.008	0.018	0.066	0.003	0.018
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	0.003	0.016	0.005	0.115	0.127	0.042	0.004	0.860	0.741	0.004	0.024	0.000
9	0.000	0.034	0.000	0.015	0.016	0.010	0.017	0.786	0.932	0.024	0.013	0.010
10	0.010	0.007	0.003	0.020	0.015	0.018	0.003	0.020	0.000	0.938	0.014	0.000
11	0.002	0.000	0.000	0.0003	0.003	0.000	0.012	0.007	0.024	0.020	0.971	0.021
12	0.004	0.005	0.000	0.006	0.002	0.002	0.005	0.003	0.001	0.013	0.001	0.982

Mais uma vez ressalva-se a dificuldade de prever o real valor do amortecimento modal, como já foi demonstrado para os modos transversais, apresentando-se na Figura 4.39 a variação do amortecimento médio associado aos 3 primeiros modos, onde se nota mais uma vez nalguns casos (por exemplo, no 3º modo) uma relação interessante entre este e o conteúdo energético do sinal (representado pelo desvio padrão):

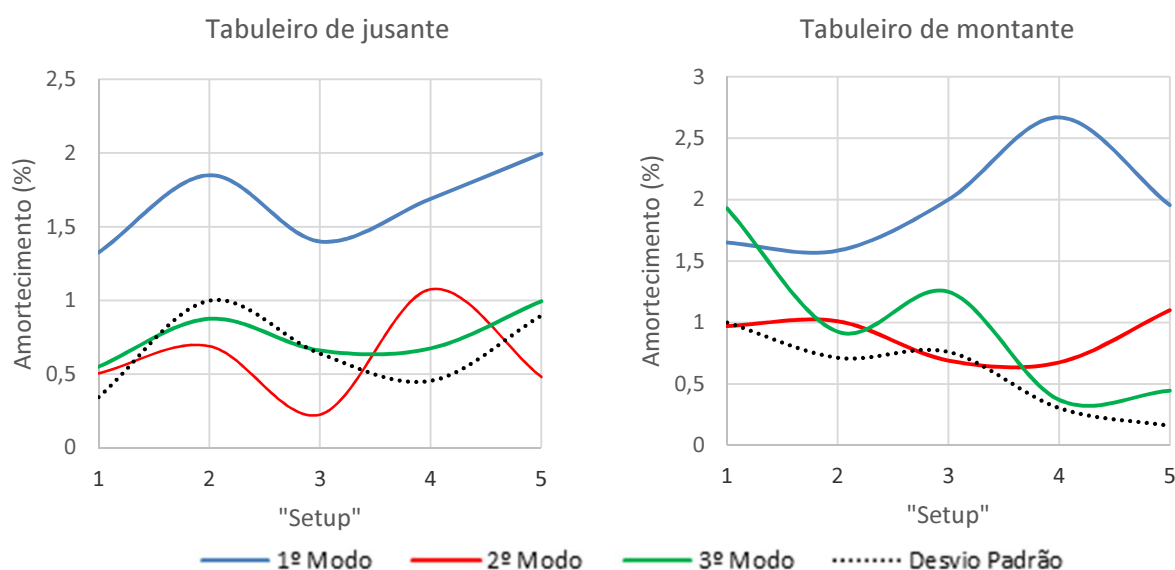


Figura 4.39 – Variação do amortecimento médio ao longo dos “setups” (modos verticais)

#### 4.4. ANÁLISE DE RESULTADOS

Tendo analisado a estrutura recorrendo a 3 técnicas distintas de processamento, e com resultados consistentes ao longo dos mesmos, considerou-se adequado fazer uma breve apreciação dos mesmos antes de tentar ajustar o modelo à realidade registada.

Na aplicação do “Peak Picking” foi necessário separar previamente as diferentes acelerações medidas já que este método é incapaz de separar modos com frequências próximas. Além disso, foi sentida uma maior dificuldade, que se viria a manter nos restantes métodos, na análise do troço compreendido entre 1.5 Hz e 2.5 Hz para modos verticais, o que poderá tornar mais complicada a calibração do modelo por estes últimos. As restantes configurações aparecem com boa definição, quer ao nível da identificação da frequência à qual estão associadas, quer à própria representação gráfica do modo, sendo no entanto praticamente inviável tentar obter qualquer tentativa de aproximação do coeficiente de amortecimento pelo método da meia potência.

No método que se aplicou de seguida (decomposição melhorada no domínio da frequência ou EFDD), esta dificuldade relativa ao amortecimento foi parcialmente vencida. De facto, já foi possível obter uma estimativa deste, embora com uma variabilidade relativamente acentuada e intermitente ao longo dos vários “setups” de monitorização, sendo uma particularidade muito interessante deste método obter uma representação da função de auto-correlação (proporcional ao movimento de vibração livre sob determinadas condições como se viu) onde é possível ao utilizador identificar o decaimento logarítmico com maior ou menor acuidade. Além disso, e apesar de não se ter explorado esta possibilidade até ao limite na busca de obter as melhores estimativas possíveis, constatou-se a capacidade do método de separar com razoável consistência os modos com frequências próximas, o que permitiria, por exemplo, o tratamento conjunto das séries temporais, e consequente diminuição dos problemas de identificação a estudar.

Por fim, aplicou-se o método da identificação estocástica a partir de sub-espacos (SSI-COV), no qual se sentiram maiores dificuldades na identificação correta de alguns dos modos verticais (um dos quais não foi sequer identificado no tabuleiro de montante e outro que foi revelado, mas com uma configuração modal de fraca qualidade), tendo sido necessário recorrer a modelos de ordem elevada, inviáveis, e até indesejáveis, para a análise dos restantes. No entanto, e vencida esta adversidade, este método mostrou-se capaz de fornecer estimativas relativamente consistentes para o amortecimento modal, pelo menos para a grande generalidade dos modos, e nas quais se depositam alguma confiança, mesmo tendo em conta a variabilidade ao longo dos vários “setups” (parcialmente explicada para alguns modos por diferentes intensidades da excitação) e que o processo de ajuste matemático, ao contrário do EFDD, é praticamente invisível para o utilizador.

Salienta-se assim importância de levar a cabo os diferentes tipos de análise, visto que todas apresentam desvantagens e vantagens distintas, e permitem maior ou menor influência do analista. Para as 3 abordagens acima resumidas, as configurações modais foram condizentes entre si e com as do modelo numérico criado mesmo sem grandes cuidados ao nível da sua caracterização (sobretudo nos modos transversais, nos 3 primeiros e nos 2 últimos modos verticais identificados, nos quais se depositam mais confiança), o que consiste uma vantagem para a tentativa de ajuste que de seguida se efetuará. Por forma a facilitar a análise conjunta dos resultados, apresenta-se de seguida no Quadro 4.16 as frequências identificadas em cada uma das abordagens:

Quadro 4.16. – Comparação de resultados (frequências)

Modo	Tabuleiro de Jusante			Tabuleiro de Montante		
	PP	EFDD	SSI-Cov	PP	EFDD	SSI-Cov
1	0.489	0.494	0.495	0.513	0.509	0.507
2	0.623	0.620	0.625	0.623	0.626	0.630
3	0.745	0.743	0.727	0.745	0.734	0.738
4	0.855	0.851	0.846	0.892	0.882	0.883
5	0.868	0.877	0.874	0.892	0.887	0.888
6	1.161	1.157	1.163	1.222	1.214	1.218
7	1.173	1.183	1.179	1.198	1.187	1.192
8	1.479	1.486	1.472	1.466	1.481	-
9	1.540	1.544	1.571	1.601	1.601	1.595
10	1.552	1.551	1.549	1.540	1.543	1.543
11	1.637	1.622	1.621	1.711	1.712	1.708
12	1.808	1.804	1.862	1.870	1.845	1.881
13	2.053	2.057	2.055	2.138	2.139	2.144
14	2.261	2.266	2.256	2.236	2.245	2.226
15	2.468	2.435	2.471	2.554	2.548	2.560
16	2.578	2.573	2.574	2.676	2.658	2.664
17	2.737	2.725	2.730	2.774	2.763	2.760
18	3.030	3.041	3.025	3.043	3.033	3.036
19	3.189	3.180	3.185	3.250	3.218	3.228
20	3.263	3.251	3.252	3.275	3.252	3.270

Além disso, e procurando comparar os amortecimentos obtidos pelos dois métodos utilizados para a sua estimativa, apresenta-se também o intervalo indicado pelo tratamento conjunto dos vários “setups” pelo método SSI-COV e o valor médio obtido por aplicação do EFDD (naturalmente, apenas possível para as frequências com amortecimentos corretamente estimados pelos dois), em que como se pode ver os resultados obtidos são de ordem de grandeza semelhante mas ainda com algumas diferenças mais ou menos significativas (Quadro 4.17):

Quadro 4.17. – Comparação de resultados (amortecimento (%))

Modo	EFDD	SSI-Cov
1	1.05	0.82-0.91
2	0.72	0.93-1.02
3	1.18	1.91-2.03
4	0.86	0.66-0.76
5	0.78	0.43-0.56
6	0.83	0.78-0.85
7	0.83	0.76-0.85
8	-	0.58-0.86
9	0.65	0.52-1.20
10	-	0.56-0.69
11	-	0.78-0.88
12	-	0.99-1.35
13	0.73	0.49-0.88
14	-	0.85-0.96
15	-	1.26-1.38
16	0.41	0.19-0.35
17	0.99	0.56-0.61
18	0.42	0.29-0.38
19	1.17	0.88-1.29
20	0.46	0.25-0.30

## 5

## AJUSTE DO MODELO NUMÉRICO

## 5.1. IDENTIFICAÇÃO DAS VARIÁVEIS A CONSIDERAR

Antes de proceder à calibração do modelo propriamente dito, é fundamental fazer uma reflexão prévia sobre as incertezas que poderão influenciar de maneira mais significativa os resultados obtidos. Por exemplo, como a excitação existente num ensaio de vibração ambiental é por norma reduzida, esta não é muitas vezes suficiente para vencer o atrito existente entre os aparelhos de apoio e o tabuleiro, alterando assim de forma significativa a rigidez do modelo e consequentemente as frequências obtidas, o que pode ser solucionado introduzindo apoios elásticos nessas secções. Tendo isto em conta, para o processo de ajuste assumiram-se as seguintes hipóteses:

- Assumindo que a secção e a massa se encontram bem caraterizadas (o que não é difícil aceitar, uma vez que são grandezas bem conhecidas), uma possível alteração ao nível do tabuleiro terá de passar pelo módulo de elasticidade considerado para o betão;
- Sendo a excitação atuante durante um ensaio de vibração ambiental muitas vezes pouco intensa, a consideração prévia da descontinuidade entre pilares e tabuleiro parece ser francamente irrealista. De facto, mesmo que esta fosse suficientemente intensa para vencer a resistência estática existente, o atrito presente seria de consideração importante uma vez que aumenta de forma significativa a rigidez da estrutura. De forma a contornar este problema, é possível introduzir apoios elásticos nas secções em causa, com uma constante de elasticidade adequada;
- No modelo apresentado no Capítulo anterior, consideraram-se ainda encastramentos perfeitos na base dos pilares, o que, como é evidente, é uma simplificação que poderá estar mais ou menos longe da realidade, mas nunca em correspondência absoluta com ela. À semelhança do ponto anterior, podem novamente ser introduzidos apoios elásticos adequados em função do tipo de fundação de cada pilar;
- Durante o processo de identificação apresentado no Capítulo anterior, foi possível constatar, sobretudo nas análises relativas aos modos verticais, que as frequências mais baixas (3 primeiros modos identificados) e as mais altas (últimos 3 modos identificados) se encontravam, em todos os métodos, bem definidas e com resultados bastante claros, ficando a zona intermédia (sensivelmente entre 1.5 Hz e 2.5 Hz) de análise mais difícil e menos evidente (por exemplo, se analisarmos o ANPSD em questão, esta última zona é claramente mais caótica que as restantes). Assim sendo, as tentativas de ajuste que de seguida se apresentarão incidirão sobretudo sobre estas frequências, ficando às outras reservado um papel mais passivo;

- A frequência experimental utilizada foi selecionada a partir da média dos dois valores mais próximos de entre os resultados dos 3 métodos de identificação usados, sendo que no caso de 2 deles serem equidistantes do terceiro, foi este último o valor considerado;
- Todo o processo que de seguida se apresentará tem como base o modelo do tabuleiro de jusante;

Por uma questão de organização do processo de ajuste, serão consideradas as rotações impedidas em qualquer uma das bases dos pilares, utilizando-se apenas apoios elásticos translacionais como forma de aproximar o deslocamento dos mesmos<sup>10</sup>, tendo-se iniciado o processo pelo tratamento do movimento no sentido transversal. De facto, como nesta direção um dos aparelhos de apoio de cada alinhamento já não permite deslocamentos relativos entre tabuleiro e pilares, a única dúvida que pode surgir reside no comportamento ao nível da fundação dos mesmos ou distribuição de massa/módulo de elasticidade. Posto isto, dividiu-se o processo em 3 grandes fases:

- Ajustar o movimento no sentido transversal, utilizando molas translacionais nas bases dos 5 pilares existentes
- Admitindo igual comportamento das fundações na direção longitudinal, ajustar nesta direção a ligação dos pilares com o tabuleiro
- Caso necessário, analisar se o módulo de elasticidade considerado para o betão se encontra corretamente definido, já que esta grandeza afetará de forma semelhante todos os modos

Graficamente, o ajuste de cada direção tendo por base primeiramente a alteração das rigidezes e de seguida do módulo de elasticidade, pode ser traduzido idealmente da seguinte forma (Figura 5.1):

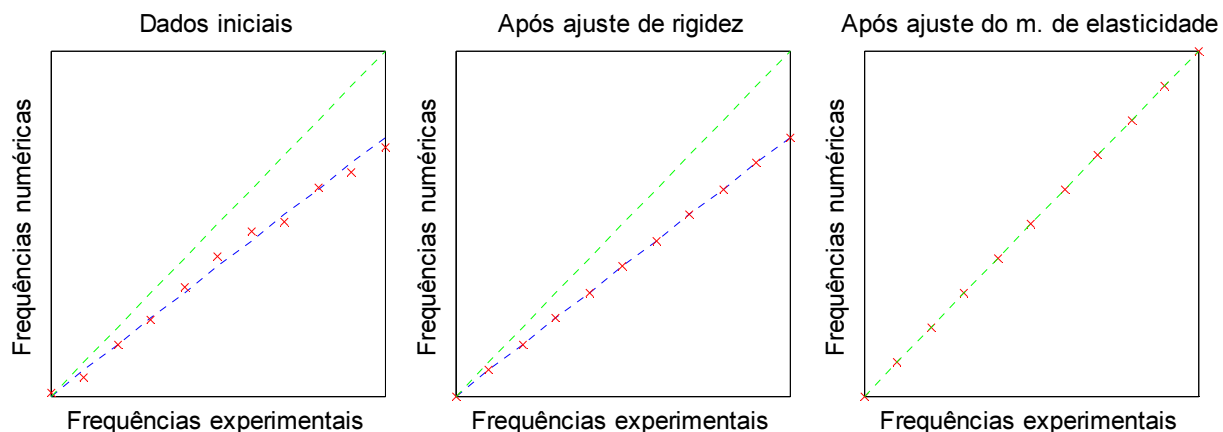


Figura 5.1 – Esquema de ajuste de um modelo

<sup>10</sup> Note-se que como só são conhecidas as configurações relativas ao tabuleiro, importa apenas caraterizar a resistência que os pilares oferecem a esse deslocamento, o que pode evidentemente ser obtido por inúmeras combinações de molas rotacionais e/ou translacionais.

## 5.2. ESTUDO DE SENSIBILIDADE

Como é evidente, e ainda antes de abordar o problema de ajuste propriamente dito, é fundamental ter uma noção mais ou menos fundamentada das consequências das alterações a cada cenário identificado nas frequências e configurações modais da estrutura. Com este propósito, calcularam-se as frequências fundamentais dos modos relevantes para esta análise para diferentes cenários, alterando-se apenas uma variável em cada processo.

### *Módulo de Elasticidade*

De forma a comprovar que alterações ao módulo de elasticidade do material utilizado tem repercussões semelhantes em todos os modos, criaram-se 3 cenários distintos, em que se considerou sucessivamente o módulo de elasticidade base do material utilizado  $E_0$  (35 GPa para o tabuleiro de 34 GPa para os pilares), metade ( $E_1$ ) e o dobro deste valor ( $E_2$ ). De seguida, apresenta-se a título de exemplo no Quadro 5.1 os valores obtidos para os 2 primeiros modos verticais e para o 3º e 4º modos transversais:

Quadro 5.1 – Efeito da alteração do módulo de elasticidade nas frequências da estrutura

$E_i$	Modos verticais				Modos transversais			
	1º modo (Hz)	$f_i/f_0$	2º modo (Hz)	$f_i/f_0$	3º modo (Hz)	$f_i/f_0$	4º modo (Hz)	$f_i/f_0$
0	0.70	1	0.81	1	0.88	1	1.20	1
1	0.50	0.71	0.57	0.70	0.63	0.72	0.86	0.72
2	0.99	1.41	1.14	1.41	1.23	1.4	1.70	1.42

Como facilmente se constata, um aumento da rigidez global do sistema através do módulo de elasticidade do material tem repercussões equivalentes em todos os modos, estando a amplitude desta alteração relacionada com a raiz quadrada da variação da grandeza em questão.

### *Flexão Transversal*

Como já se viu, as frequências associadas ao movimento neste sentido são função da rigidez assumida ao nível da fundação dos pilares, que como já se explicou será analisada recorrendo a molas translacionais.

Numa primeira fase, procurou-se perceber de forma meramente qualitativa quais os pilares que, quando modificadas as respetivas condições de fundação, mais contribuiriam para alterar as frequências de cada modo. Nesse sentido analisaram-se as diferentes configurações modais, avaliando para cada uma a amplitude associada a cada pilar como indicadora da sua influência (de facto, no caso limite de o pilar se encontrar sobre um nodo de um determinado modo, e portanto com amplitude nula, qualquer alteração nesse apoio não terá nenhuma consequência no mesmo). Assim, organizou-se os resultados obtidos no Quadro 5.2, em que de 1 para 5 a amplitude modal associada aos pilares aumenta:

Quadro 5.2 – Avaliação da influência de cada pilar nos modos de vibração

Modo	P1	P2	P3	P4	P5
1	1	3	5	4	2
2	1	4	2	5	3
3	2	4	3	1	5
4	1	5	2	3	4
5	4	2	1	3	5
6	4	2	5	3	1
7	5	4	2	3	1
8	5	3	4	2	1

Desde logo podem ser retiradas algumas ilações da análise efetuada. Por exemplo, constata-se que uma alteração nas condições fronteira do primeiro pilar, poucas implicações terá ao nível dos 4 primeiros modos, e, pelo contrário, modificará de forma significativa os 4 últimos. No entanto, e considerando que esta abordagem não fornecia informação suficiente para uma correta interpretação dos resultados, simularam-se vários cenários em que apenas se alterava um dos parâmetros em estudo (ou seja, a rigidez associada unicamente a um dos pilares), tendo-se registado as variações de frequência obtidas numa folha de EXCEL. De seguida apresenta-se na Figura 5.2 um gráfico com a variação da primeira frequência em função da rigidez dos pilares P1 e P3 separadamente (em abcissas a rigidez translacional da base e em ordenadas a relação  $f/f_0$ )

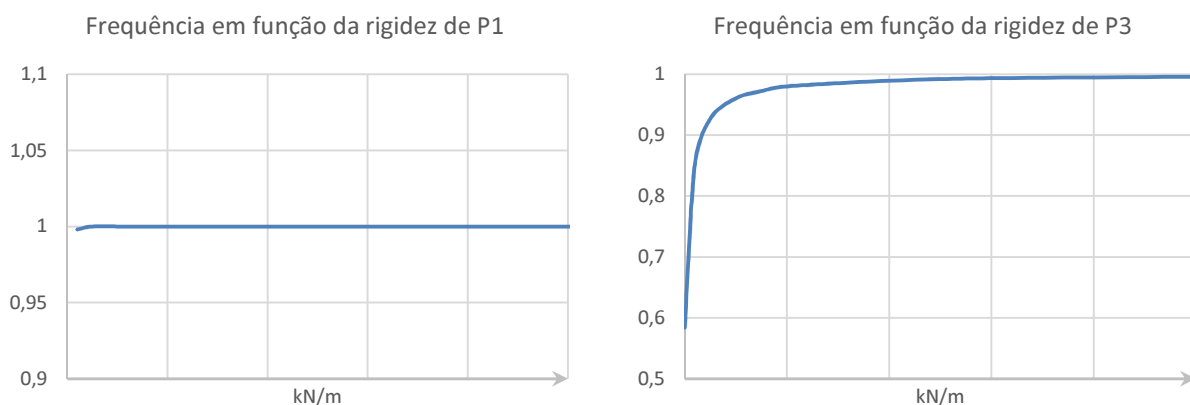


Figura 5.2 – Variação da 1ª frequência transversal em função das rigidezes dos pilares P1 e P3

Como se pode ver, os gráficos apresentados estão de acordo com as previsões do Quadro 5.2 que apontavam os pilares P1 e P3 como aqueles que menos e mais influenciavam a frequência do primeiro modo, respetivamente.



### Flexão Vertical

Utilizando o mesmo processo, para uma determinada rigidez da fundação dos pilares, para a resistência oferecida pelos aparelhos de apoio ao movimento, as conclusões não são tão óbvias, desde logo porque as configurações modais da estrutura podem envolver maior ou menor deslocamento longitudinal, sendo que quando as alterações introduzidas levam a que um determinado modo passe da primeira para a segunda condição, a frequência pode eventualmente diminuir fruto de uma menor solicitação da rigidez à flexão dos pilares. Além disso, as duas situações diferem na própria configuração obtida. De facto, enquanto no caso anterior a forma dos modos era praticamente inalterável ao longo do processo (e condizente com os resultados experimentais), agora, e para determinadas frequências, registaram-se alterações mais ou menos significativas em função da rigidez imposta. Apesar destes condicionalismos, elaborou-se o mesmo estudo já realizado para as fundações dos pilares, atribuindo sucessivamente diferentes valores para as rigidezes rotacionais e translacionais de cada aparelho de apoio, sendo os resultados registados numa folha de EXCEL.

### 5.3. AJUSTE DO MODELO NUMÉRICO

Numa primeira tentativa, procurou-se criar um mecanismo que fosse capaz de, conhecidas as alterações às frequências provocadas pela mudança de rigidez de cada uma das molas, estimar de forma mais ou menos fidedigna a frequência resultante da alteração simultânea de mais do que um apoio. Para realizar esta tarefa, assumiram-se as seguintes simplificações:

- A configuração modal, para os vários cenários montados, mantém-se constante independentemente das alterações introduzidas
- As alterações de rigidez face ao modelo inicial de cada ajuste de rigidez mantém-se as mesmas quando estas são combinadas

Do primeiro ponto, e como a matriz de massa é constante, resulta então que a massa modal também o é, pelo que se pode escrever para um determinado modo, e em função de duas alterações distintas:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^{inicial} = \frac{\sqrt{\frac{k_1^i}{m_1^i}}}{2\pi} \\ f_1^{final} = \frac{\sqrt{\frac{k_1^f}{m_1^f}}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{k_1^f}{m_1^i}}}{2\pi} \end{array} \right. \longrightarrow \Delta k_1 = k_1^i - k_1^f = 4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot ((f_1^{inicial})^2 - (f_1^{final})^2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_2^{inicial} = \frac{\sqrt{\frac{k_2^i}{m_2^i}}}{2\pi} \\ f_2^{final} = \frac{\sqrt{\frac{k_2^f}{m_2^f}}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{k_2^f}{m_2^i}}}{2\pi} \end{array} \right. \longrightarrow \Delta k_2 = k_2^i - k_2^f = 4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot ((f_2^{inicial})^2 - (f_2^{final})^2) \quad (5.1)$$

De onde resulta, se  $m_1 = m_2$ , que a frequência final quando considerados simultaneamente os cenários 1 e 2, e se se partir do mesmo estado inicial em todas as simulações, pode ser aproximada por:

$$f = \frac{\sqrt{k}}{2\pi} \approx \frac{\sqrt{\frac{k_{inicial} - \sum \Delta k_i}{m}}}{2\pi} = \sqrt{\frac{k_{inicial} - \sum \Delta k_i}{4 \cdot \pi^2 \cdot m}} = \sqrt{f_{inicial}^2 - \sum (f_{inicial}^2 - f_{final}^2)} \quad (5.2)$$

Se a configuração modal tiver variações mais ou menos significativas, o acima exposto perde validade, podendo ser efetuada uma aproximação utilizando a relação entre a massa modal mobilizada num determinado cenário e a massa modal mobilizada no cenário inicial para estimar a variação de rigidez modal introduzida. Como é evidente, este método pode ter resultados mais ou menos corretos, tendo-se apenas procurado uma primeira aproximação que permitisse depois um ajuste manual de forma a minimizar as diferenças para os resultados efetivamente obtidos no modelo. Tendo em conta as considerações já efetuadas sobre o módulo de elasticidade afetar igualmente todos os modos, analisou-se o erro de duas maneiras distintas:

- Através da soma do módulo da variação relativa entre estimativas e frequências experimentais, o que pode ser traduzido por:

$$\varepsilon_1 = \sum \left| \frac{f_{estimada} - f_{experimental}}{f_{experimental}} \right| \quad (5.3)$$

- Através da variação da relação entre as mesmas grandezas em torno de um determinado valor, ou seja, do desvio padrão dos quocientes  $f_{estimada}/f_{experimental}$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum \left( \frac{f_{estimada}^i}{f_{experimental}^i} - \left( \frac{f_{estimada}}{f_{experimental}} \right) \right)^2} \quad (5.4)$$

**Exemplo 5.1.** – De seguida, apresenta-se um exemplo do método de aproximação acima explicitado, avaliando para isso a 1ª frequência transversal identificada em função da rigidez dos pilares P2 e P3 (Quadro 5.3).

Quadro 5.3 – Alterações introduzidas pela variação da rigidez da base dos pilares P2 e P3

Pilar	Estado inicial			Estado final		
	$K_{fundação}$	$f$ (Hz)	$m_{modal}$	$K_{fundação}$	$f$ (Hz)	$m_{modal}$
2	$\infty$	0.507	13136	2500000	0.505	12829
3				2500000	0.503	12958

Segundo este método, a frequência obtida considerando simultaneamente os 2 cenários viria então:

$$f = \sqrt{f_{inicial}^2 - \sum (f_{inicial}^2 - f_{final}^2)} = \dots \quad (5.5)$$

$$\dots = \sqrt{0.507^2 - [(0.507 - 0.505)^2 + (0.507 - 0.503)^2]} = 0.501 \text{ Hz}$$

Se aplicarmos as alterações apresentadas ao modelo numérico, obtém-se para este modo uma frequência de 0.501 Hz, igual pelo menos até à precisão com que se está a trabalhar à estimativa apresentada. No entanto, tal só é possível porque as configurações modais não sofrem alterações significativas, o que pode ser confirmado pelo valor associado a cada massa modal. É de notar que apenas se sobrepueram 2 cenários, ficando alguma reserva sobre a precisão do método para cenários mais complexos.

### 5.3.1. AJUSTE DO TABULEIRO DE JUSANTE

#### *Flexão Transversal*

Antes de aplicar o método apresentado para procurar ajustes o mais próximos possível da realidade, considerou-se importante analisar o cenário de base, em que os pilares se encontram perfeitamente encastrados, e compará-lo com os resultados experimentais, surgindo então o Quadro 5.4 e o gráfico apresentado na Figura 5.3 (a média apresentada foi realizada utilizando o valor absoluto de cada desvio):

Quadro 5.4 – Comparação entre frequências numéricas e experimentais transversais

Modo	$f_{numérica}$	$f_{ensaio}$	Erro (%)
1	0.507	0.495	2.5
2	0.626	0.624	0.32
3	0.876	0.853	2.70
4	1.197	1.162	3.01
5	1.595	1.542	3.44
6	2.106	2.055	2.48
7	2.698	2.574	4.84
8	3.357	3.187	5.33
Média	-	-	3.1

Comparação entre frequências experimentais e numéricas transversais

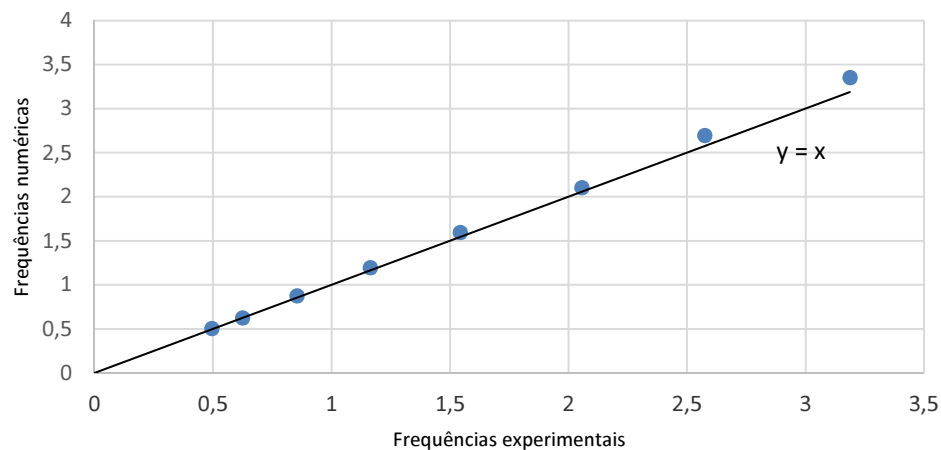


Figura 5.3 – Comparação gráfica das frequências numéricas e experimentais transversais

Como se pode ver, os resultados obtidos pelo modelo são já bastante próximos dos identificados pelo ensaio, notando-se no entanto uma certa tendência para as primeiras se encontrarem ligeiramente acima das segundas (em média 3.1%), fruto eventualmente do excesso de rigidez adotado nas fundações. Posto isto, procurou-se baixar o erro associado às estimativas geradas pelo modelo através da colocação de apoios elásticos nas várias fundações.

Tendo os vários cenários para cada pilar registados numa folha de EXCEL, foi possível criar uma rotina interativa entre este e o MATLAB que permitisse de forma automática testar todas as combinações possíveis, tendo como cenário inicial uma rigidez translacional infinita, ou seja, um encastramento perfeito das fundações, e registar a diferença entre frequências estimadas e frequências experimentais. Numa primeira análise, e utilizando diretamente as estimativas da rotina criada, obteve-se os resultados para a rigidez de cada mola apresentados no Quadro 5.5, bem como as estimativas para as várias frequências, quer pelo método, quer pelo modelo (sendo obviamente estes últimos os resultados adequados para análise e sendo os outros apenas apresentados para mostrar a eficiência do processo) presentes no Quadro 5.6:

Quadro 5.5. – Rigidez adotadas na base de cada pilar (1ª iteração)

	P1	P2	P3	P4	P5
K (MN/m)	1000	2500	1000	10000	5000

Quadro 5.6 – Frequências obtidas para os modos transversais (1ª iteração)<sup>11</sup>

Modo	$f_{ensaio}$	$f_{numérica}$	$f_{estimada}$	Erro (%)
1	0.495	0.494	0.495	-0.20
2	0.624	0.619	0.619	-0.80
3	0.853	0.858	0.859	0.59
4	1.162	1.159	1.159	-0.26
5	1.542	1.558	1.557	1.04
6	2.055	2.051	2.053	-0.19
7	2.574	2.621	2.623	1.83
8	3.187	3.259	3.258	2.26
Média	-	-	-	0.90
Média 1-6 <sup>12</sup>	-	-	-	0.51

<sup>11</sup> Por frequência numérica entende-se o resultado obtido pelo modelo numérico após introdução das alterações, por estimada a obtida pela rotina de ajuste criada e por ensaio aquela que resultou do ensaio de vibração ambiental

<sup>12</sup> Valores obtidos considerando apenas os primeiros 6 modos

Analisando os resultados, assumiu-se que a aproximação era já aceitável, sobretudo ao nível dos 6 primeiros modos, com uma redução do desvio global médio de 3.1 para 0.9 pontos percentuais. Tendo constatado esse facto, e focando a análise agora apenas nos elementos mais estáveis, procurou-se a combinação que melhor aproximasse estes, o que se conseguiu com a seguinte combinação de rigidezes:

Quadro 5.7 – Rigidezes adotadas na base de cada pilar (2ª iteração)

	P1	P2	P3	P4	P5
K (MN/m)	1000	7500	1000	10000	2500

Quadro 5.8 – Frequências obtidas para os modos transversais (2ª iteração)

Modo	$f_{ensaio}$	$f_{numérica}$	$f_{estimada}$	Erro (%)
1	0.495	0.495	0.497	0
2	0.624	0.620	0.620	0.64
3	0.853	0.859	0.859	-0.70
4	1.162	1.158	1.159	0.344
5	1.542	1.554	1.553	-0.78
6	2.055	2.049	2.051	0.29
7	2.574	2.622	2.629	1.86
8	3.187	3.261	3.261	2.32
Média	-	-	-	0.87
Média 1-6	-	-	-	0.46

Como se pode ver, as estimativas melhoraram ligeiramente, inclusivamente o erro médio, apesar dos dois últimos modos terem um aumento ligeiro do erro. Daqui constata-se que existe de facto um erro associado ao método (já que analisando apenas os primeiros 6 modos se obteve uma estimativa global superior) sem este ser muito significativo (note-se que qualquer uma das combinações fornece resultados bastante satisfatórios), o que pode indicar que a solução apresentada não será eventualmente a ideal, mas antes uma que fornece uma boa estimativa dos modos avaliados. Representando as frequências obtidas num gráfico semelhante ao apresentado na Figura 5.3, resulta a Figura 5.4:

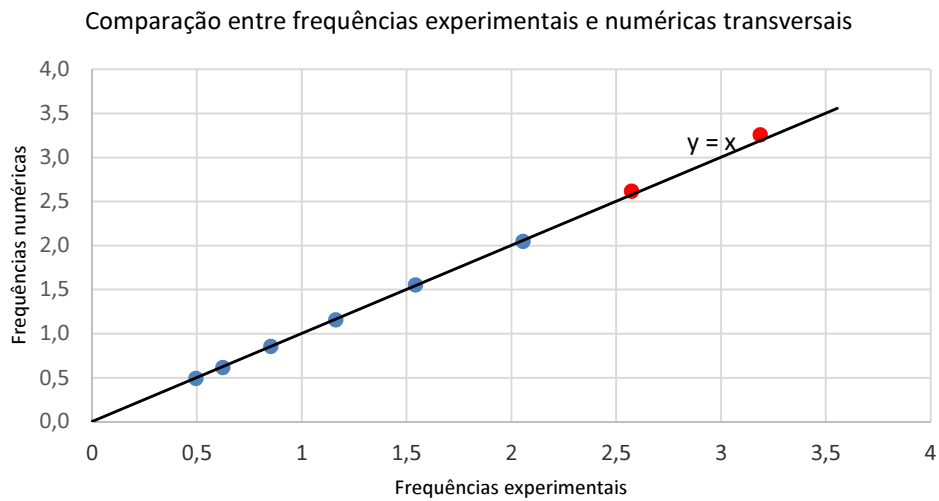


Figura 5.4 – Comparação gráfica das frequências numéricas e experimentais transversais após ajuste

Como se pode ver as primeiras 6 frequências são agora bem explicadas pelo modelo criado, enquanto às duas últimas está associado um erro maior, sendo este, no entanto, inferior a metade do erro inicial.

### *Flexão Vertical*

Tendo o problema da flexão transversal bem aproximado, passou-se então para a tentativa de ajuste dos modos predominantemente verticais. Assumindo que o comportamento do solo é isotrópico, utilizaram-se molas equivalentes às obtidas no ajuste dos modos transversais em ambas as direções na fundação dos pilares, ficando por afinar a rigidez associada aos aparelhos de apoio. Considerando os deslocamentos longitudinais e as rotações segundo o eixo transversal completamente livres, o modelo fornece os resultados que se apresentam na Figura 5.5 (os pontos a azul indicam frequências cujos modos experimentais e numéricos são facilmente correspondidos enquanto os pontos vermelhos indicam aquelas para as quais a correspondência não é tão evidente à partida) e no Quadro 5.9:

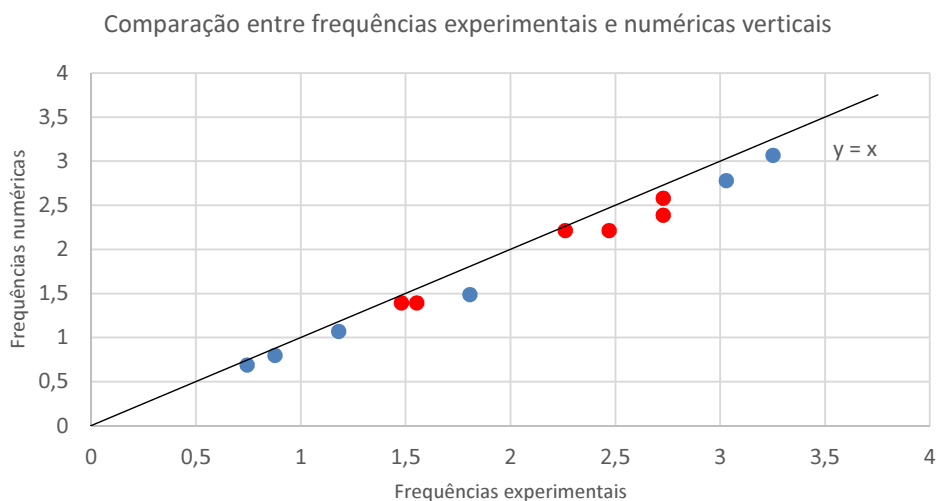


Figura 5.5 – Comparação gráfica entre frequências numéricas e experimentais verticais (rotação e deslocamento livre)

Quadro 5.9 – Comparação entre frequências numéricas e experimentais verticais (rotação e deslocamento livre)

Modo	$f_{numérica}$	$f_{ensaio}$	Erro (%)
1	0.690	0.744	-7.26
2	0.797	0.876	-9.02
3	1.069	1.181	-9.48
4	1.393	1.479	-5.81
		1.552	-10.24
5	1.489	1.806	-17.55
6	2.213	2.261	-2.12
		2.470	-10.40
7	2.387	2.728	-12.5
	2.582		-5.35
8	2.780	3.028	-8.19
9	3.067	3.252	-5.69
Média	-	-	8.64

Como se constata, as diferenças obtidas são ainda bastante significativas, havendo mesmo modos cuja correspondência não é à partida evidente, tendo-se optado então por remeter para estes, bem como para o modo na vizinhança de 1.8 Hz devido à pior qualidade do processo de identificação nesta zona, um papel mais passivo, baseando o ajuste nos restantes (assinalados a verde no Quadro 5.9.). Além disso, e quando se compara as frequências experimentais verticais obtidas para os 2 tabuleiros, observa-se que estas não coincidem completamente, como seria expetável se as várias ligações aos pilares não oferecessem qualquer resistência ao deslocamento e à rotação (note-se que os dois tabuleiros são exatamente iguais e que os dois pilares que se encontram construídos em continuidade com estes também). Esta constatação permite afirmar que os pilares não se encontram completamente desligados do tabuleiro, pelo que as rotações e deslocamentos nos seus topos não se encontram, como até agora haviam sido idealizadas, perfeitamente livres. Para este ajuste, consideraram-se então duas variáveis a analisar, a resistência oferecida a deslocamentos longitudinais e a resistência oferecida pelos mesmos à flexão segundo um eixo horizontal transversal ao tabuleiro, introduzindo-se ligações elásticas, quer rotacionais quer translacionais, nas diferentes ligações, que se separam em dois grandes grupos: ligações tabuleiro-pilares e ligações tabuleiro-encontro. Não havendo aparentemente nenhum motivo que levasse a assumir comportamentos distintos nos diferentes alinhamentos, tentou-se aproximar os resultados experimentais recorrendo a molas com a mesma rigidez para todas as ligações de cada um dos grupos. Um dos problemas que se levantaram logo à partida, como já foi avançado, passa por não ser absolutamente evidente que um aumento da rigidez dos apoios conduza a um aumento das frequências, como seria eventualmente lógico pensar. De facto, se os modos fossem meramente verticais, tal seria verdade, mas, havendo uma componente de movimento longitudinal que pode praticamente deixar de ser mobilizada se as ligações longitudinais forem muito rígidas, a rigidez à flexão dos pilares pode ser pouco ou nada solicitada, fazendo com que determinadas rigidezes modais possam diminuir. Numa primeira fase, modificou-se o

cenário de completamente livre para ligações monolíticas, tendo-se obtido os seguintes resultados (Quadro 5.10):

Quadro 5.10 - Comparação entre frequências numéricas e experimentais verticais (ligações monolíticas)

Modo	$f_{numérica}$	$f_{ensaio}$	Erro (%)
1	0.828	0.744	11.29
2	1.031	0.876	17.69
3	1.300	1.181	10.08
8	3.096	3.028	2.25
9	3.759	3.252	15.59

Da análise dos modos acima representados pela sua frequência pode-se ainda concluir que, como as frequências identificadas se encontram balizadas pelos 2 modelos extremos, então será eventualmente possível ajustar o modelo sem intervir ao nível da massa ou módulo de deformabilidade dos elementos (o que é interessante pois tal ação afetaria também os resultados já obtidos para os modos transversais).

Além disso, pela análise das configurações modais obtidas para os dois cenários, foi possível constatar que os 2 últimos modos, ao contrário dos primeiros 3, sofreram alterações relativamente significativas, o que indicia que o aumento de rigidez foi claramente excessivo (o que também era esperado)

Por outro lado, procurou-se perceber se os modos eram mais ou menos influenciados pela rigidez translacional ou rotacional das ligações. Com este propósito, modelaram-se dois cenários alternativos, em que em cada um apenas se bloqueou um dos deslocamentos, com os resultados do Quadro 5.11:

Quadro 5.11 – Frequências obtidas para os modos verticais bloqueando apenas rotações ou translações

Modo	$f_{numérica}^{13}$	$f_{numérica}^{14}$	$f_{ensaio}$	Erro (%) <sup>13</sup>	Erro (%) <sup>14</sup>
1	0.700	0.754	0.744	-5.91	1.34
2	0.788	0.916	0.876	-10.05	4.57
3	1.079	1.148	1.181	-8.64	-2.79
8	2.874	3.029	3.028	-5.09	0.03
9	3.152	3.483	3.252	-3.08	7.10

Como se pode ver, a maior influência nas frequências associadas a modos verticais provém sobretudo de alterações associadas à rigidez à flexão nos aparelhos de apoio (o que não traduz uma grande surpresa visto grande parte dos modos mobilizarem pouco movimento longitudinal). Nesta altura, foi importante

<sup>13</sup> Resultados obtidos bloqueando o movimento relativo longitudinal

<sup>14</sup> Resultados obtidos bloqueando o movimento relativo rotacional



perceber qual a ligação que mais afetava os resultados entre o apoio nos encontros ou nos pilares. Para isso, simularam-se dois cenários, ambos com os deslocamentos impedidos, mas em que se bloqueavam também ou as rotações nos pilares ou nos encontros, tendo-se obtido os seguintes resultados (Quadro 5.12):

Quadro 5.12 – Frequências obtidas para os modos verticais bloqueando rotações nos pilares ou nos encontros

Modo	$f_{numérica}^{15}$	$f_{numérica}^{16}$	$f_{ensaio}$	Erro (%) <sup>15</sup>	Erro (%) <sup>16</sup>
1	0.795	0.730	0.744	-5.91	1.34
2	0.950	0.865	0.876	-10.05	4.57
3	1.194	1.141	1.181	-8.64	-2.79
8	2.961	3.028	3.028	-5.09	0.03
9	3.214	3.437	3.252	-3.08	7.10

Da análise das configurações obtidas, constatou-se que as configurações associadas a alguns modos (sobretudo aos mais elevados) apresentavam já uma diferença considerável para as obtidas experimentalmente quando a rotação nos encontros era completamente impedida, além de levar a uma sobreavaliação considerável da última frequência (tal poderá dever-se ao facto de bloquear completamente a rotação nos encontros, ao contrário do que sucede nos pilares, não se limitar a bloquear o movimento relativo, mas também a rotação absoluta da secção). Posto isto, tentou-se chegar a um ponto de equilíbrio entre os vários cenários, tendo-se obtido a melhor aproximação, quando os deslocamentos se encontravam impedidos, para uma rigidez rotacional nos encontros e nos pilares de 1250 e 10000 respetivamente (valores em MN.m por grau), tendo-se obtido os resultados apresentados no Quadro 5.13:

Quadro 5.13 – Frequências verticais obtidas (1ª iteração)

Modo	$f_{numérica}$	$f_{ensaio}$	Erro (%)
1	0.750	0.744	0.81
2	0.878	0.876	0.23
3	1.149	1.181	-2.71
8	2.994	3.028	-1.12
9	3.326	3.252	2.28
Média	-	-	1.43

Como se pode observar, os resultados obtidos aproximam razoavelmente bem todas as frequências, tendo-se no entanto constatado ao longo da análise que a busca por um resultado globalmente satisfatório

<sup>15</sup> Resultados obtidos bloqueando rotações nos pilares

<sup>16</sup> Resultados obtidos bloqueando rotações nos encontros

saía prejudicada devido ao último modo utilizado e que o terceiro modo identificado se encontrava sistematicamente abaixo dos resultados experimentais. Além disso, e por não parecer razoável assumir uma oposição completa ao deslocamento longitudinal por parte dos aparelhos de apoio, procurou-se, utilizando as mesmas molas rotacionais, adaptar a rigidez translacional dos mesmos, tendo-se obtido os resultados apresentados no Quadro 5.14 para um valor de 1000 MN/m:

Quadro 5.14 – Frequências verticais obtidas (2ª iteração)

Modo	$f_{numérica}$	$f_{ensaio}$	Erro (%)
1	0.747	0.744	0.40
2	0.874	0.876	-0.23
3	1.143	1.181	-3.22
8	2.987	3.028	-1.35
9	3.294	3.252	1.29
Média	-	-	1.30

Destes últimos resultados, é possível perceber que o erro médio do processo diminui ligeiramente, sendo esta redução mais evidente quando se analisa apenas os 2 primeiros e os 2 últimos modos, passando de 0.89% para 0.66%. Analisaram-se de seguida as estimativas obtidas para os modos não utilizados para o ajuste e compararam-se as configurações modais numéricas e experimentais, tendo-se chegado aos resultados apresentados no Quadro 5.15. e 5.16 (por simplicidade, apenas se apresenta para cada modo aquele cuja correspondência entre modelo e ensaio era mais forte):

Quadro 5.15 – Comparação de resultados para a 1ª iteração

Modo	$f_{numérica}$	$f_{ensaio}$	Erro (%)	MAC
1	0.750	0.744	0.81	0.92
2	0.878	0.876	0.23	0.90
3	1.149	1.181	-2.71	0.95
4	1.527	1.479	3.25	0.82
5	1.773	1.806	-1.83	0.71
6	2.460	2.261	8.80	0.81
7	2.666	2.728	-2.27	0.87
8	2.994	3.028	-1.12	0.81
9	3.326	3.252	2.28	0.74
Média	-	-	2.59	0.84

Quadro 5.16 – Comparação de resultados para a 2ª iteração

Modo	$f_{numérica}$	$f_{ensaio}$	Erro (%)	MAC
1	0.747	0.744	0.40	0.92
2	0.874	0.876	-0.23	0.90
3	1.143	1.181	-3.22	0.95
4	1.525	1.552	-1.74	0.81
5	1.759	1.806	-2.60	0.72
6	2.327	2.261	2.92	0.95
7	2.621	2.728	-3.92	0.95
8	2.987	3.028	-1.35	0.84
9	3.294	3.252	1.29	0.75
Média	-	-	1.96	0.87

Como se pode constatar, os resultados obtidos são em média ligeiramente melhores na segunda abordagem, quer na identificação de frequências, quer na correspondência entre configurações modais. Além disso, como a oposição completa ao movimento parecia ser francamente exagerada, optou-se por este segundo cenário em detrimento do primeiro.

### 5.3.2. AJUSTE DO TABULEIRO DE MONTANTE

Como o problema de ajuste para o tabuleiro de montante seria um processo em tudo semelhante ao já apresentado para o tabuleiro de jusante à exceção das variáveis  $e$ , presumivelmente, das rigidezes obtidas, optou-se por não o realizar com o detalhe exposto no ponto anterior. Posto isto, apenas se introduziram as alterações no comprimento dos pilares existentes entre os dois tabuleiros, tendo-se de seguida em função dos resultados obtidos procurado possíveis justificações para as diferenças encontradas. Note-se ainda, como também já foi dito, que a simples constatação de que os resultados experimentais dos 2 tabuleiros não coincidirem, sobretudo ao nível dos modos verticais, permite afirmar que os pilares estão efetivamente a ser mobilizados, e que, portanto, alterações da sua rigidez de fundação ou comprimento não são desprezáveis para uma correta definição do comportamento dinâmico de cada um dos tabuleiros.

#### *Flexão Transversal*

Como já foi visto, as frequências associadas a movimentos no sentido transversal estão unicamente associadas à rigidez considerada na fundação dos pilares, visto um dos aparelhos de apoio de cada alinhamento não permitir deslocamentos relativos nesta direção. Com as rigidezes obtidas previamente obtiveram-se as frequências apresentadas no Quadro 5.17:

Quadro 5.17 – Comparação entre frequências experimentais e numéricas transversais (montante)

Modo	$f_{ensaio}$	$f_{numérica}$	Erro (%)
1	0.508	0.496	-2.36
2	0.625	0.622	-0.48
3	0.883	0.866	-1.93
4	1.218	1.189	-2.38
5	1.601	1.581	-1.25
6	2.139	2.086	-2.48
7	2.661	2.678	0.64
8	3.223	3.317	2.92
Média	-	-	1.80

Como se pode constatar, o erro associado ao movimento transversal é agora cerca do dobro do obtido para o tabuleiro de jusante. Evidentemente, estas diferenças eram de certo modo esperadas já que a calibração da rigidez das molas tinha tido como ponto de partida um cenário distinto do agora apresentado, não havendo nenhuma garantia de uma extrapolação adequada. No entanto, e como os resultados obtidos também não se encontram completamente desfasados da realidade (erros inferiores a 3%), não podendo estas diferenças ser associadas a diferentes níveis de rigidez nas ligações do tabuleiro, os desvios obtidos poderão dever-se, por exemplo, à profundidade a que se encontram as sapatas. De facto, e para além da diferença de comprimento dos pilares, devido ao terreno apresentar uma determinada pendente, os pilares homólogos dos 2 tabuleiros encontram as suas sapatas a diferentes profundidades, medidas a partir da superfície do terreno, o que pode levar a valores distintos da rigidez das suas fundações.

### *Flexão Vertical*

No caso do movimento vertical do tabuleiro, apenas se analisaram os modos utilizados no processo de ajuste por serem aqueles sobre os quais não existiram dúvidas de maior em relação aos seus correspondentes numéricos. Posto isto, obtiveram-se as frequências naturais apresentadas no Quadro 5.18:

Quadro 5.18 – Comparação entre frequências numéricas e experimentais verticais (montante)

Modo	$f_{numérica}$	$f_{ensaio}$	Erro (%)
1	0.747	0.736	1.47
2	0.875	0.888	1.49
3	1.143	1.190	4.11
8	2.990	3.035	1.51
9	3.296	3.273	0.70
Média	-	-	1.85

Mais uma vez, os resultados aparecem ligeiramente piores do que os obtidos previamente, como era esperado. No entanto, e ao contrário do cenário dos modos transversais, estas diferenças podem agora ser explicadas tanto por rigidezes distintas ao nível da fundação mas também, e residindo aqui a diferença entre os 2 casos, por condições de ligação efetivamente distintas das obtidas previamente. De facto, e sendo por hipótese os aparelhos idênticos, estas diferenças podem dever-se quer a instalações distintas dos mesmos, quer, mais uma vez, a condições distintas de excitação.

#### 5.4. RESULTADOS FINAIS E CONCLUSÕES

Após o ajuste efetuado, obtiveram-se então os seguintes modos verticais, que se comparam em frequência e MAC com os respetivos resultados experimentais no Quadro 5.19 (apresenta-se também os valores médios quando considerados apenas os 3 primeiros modos de vibração nas duas direções):

Quadro 5.19 – Comparação final entre modos numéricos e experimentais do tabuleiro de jusante

Modo	$f_{numérica}$	$f_{ensaio}$	Erro (%)	MAC
1	0.495	0.495	0	0.94
2	0.620	0.624	-0.64	0.92
3	0.747	0.744	0.40	0.92
4	0.859	0.853	0.70	0.96
5	0.874	0.876	-0.23	0.90
6	1.158	1.162	-0.34	0.89
7	1.143	1.181	-3.22	0.95
8	1.525	1.552	-1.74	0.81
9	1.554	1.542	0.78	0.82
10	1.759	1.806	-2.60	0.72
11	2.049	2.055	-0.29	0.84
12	2.327	2.261	2.92	0.95
13	2.621	2.728	-3.92	0.95
14	2.622	2.574	1.86	0.82
15	2.987	3.028	-1.35	0.84
16	3.261	3.187	2.32	0.78
17	3.294	3.252	1.29	0.75
Média <sup>17</sup>	-	-	1.45 / 0.87	0.87 / 0.93

<sup>17</sup> Os valores a vermelho foram obtidos utilizando apenas os 3 primeiros modos de cada direção

Ou, representando novamente as frequências numéricas em função das experimentais, obtém-se o gráfico apresentado na Figura 5.6:

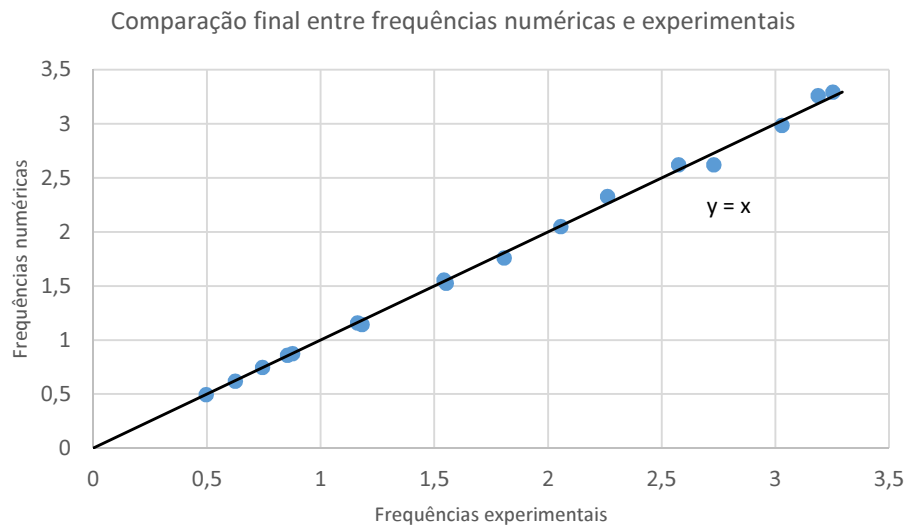


Figura 5.6 – Comparação final gráfica entre frequências numéricas e experimentais

Dos resultados agora apresentados, bem como do processo de ajuste em geral, podem-se então retirar algumas conclusões. A saber:

- As alterações introduzidas tiveram o efeito desejado, minimizando de forma significativa o erro das estimativas numéricas para os modos de vibração
- O modelo obtido traduz agora de forma muito aproximada a realidade, sobretudo ao nível dos primeiros modos de vibração (nas duas direções), notando-se uma perda de qualidade das estimativas crescente à medida que a ordem dos modos aumenta
- O ajuste dos modos predominantemente verticais foi na globalidade de qualidade inferior e de dificuldade mais elevada em relação ao ajuste dos modos transversais, devendo-se parte destas dificuldades à alteração mais ou menos significativa das configurações modais em função das condições de apoio, e à dificuldade de prever de forma consistente as consequências dessas alterações nas frequências naturais da estrutura, devido, por exemplo, à maior ou menor solicitação à flexão dos pilares, dependendo da liberdade permitida no sentido longitudinal.

# 6

## CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

### 6.1. CONCLUSÕES

Durante a realização deste trabalho procurou-se abordar de forma fundamentada os vários aspetos associados à identificação modal estocástica, bem como a sua aplicação a resultados de ensaios de vibração ambiental de estruturas. Posto isto, sistematizam-se de seguida as principais ilações retiradas ao longo de todo o processo.

No Capítulo 2 foram apresentados os conceitos teóricos fundamentais para uma correta compreensão e explicação dos métodos de identificação posteriormente abordados. Além disso, apresentaram-se ainda as caraterísticas de dois modelos simplificados de uma obra-de-arte criados num software de cálculo automático que foram utilizados para melhor ilustrar os conceitos apresentados e que foram de grande utilidade para testar e validar as rotinas criadas associadas aos métodos de identificação estocástica estudados.

No Capítulo 3 são descritos os métodos de identificação modal estocástica propriamente ditos, tendo este trabalho incidido sobre o método da seleção de picos (PP), o método da decomposição no domínio da frequência (FDD / EFDD) e o método de identificação estocástica em sub-espacos a partir das correlações (SSI-COV). Utilizando o MATLAB foram então desenvolvidas rotinas que permitissem explorar e comparar os três métodos, tendo-se ainda criado uma ferramenta numérica, baseada nos modelos de estado, capaz de simular as séries temporais de resposta dos modelos criados a uma determinada excitação, séries essas depois utilizadas para estudar os métodos. Este processo, além de permitir ilustrar adequadamente as potencialidades de cada um dos métodos, permitiu ainda consolidar os conhecimentos relativos aos mesmos e ganhar confiança na sua aplicação, fundamental para uma abordagem correta de dados reais (que, como era esperado, trouxeram dificuldades acrescidas às análises efetuadas).

Tendo as várias rotinas validadas por dados gerados artificialmente, no Capítulo 4 passou-se então ao estudo de uma estrutura concreta, tendo-se escolhido a ponte sobre o Rio Douro da A41. Numa primeira fase, e tendo por base o projeto do Engenheiro Armando Rito, criou-se um modelo numérico simplificado do caso de estudo que permitissem controlar os resultados obtidos experimentalmente (modelo esse que foi posteriormente alterado de maneira a estimar corretamente os parâmetros identificados). De seguida aplicaram-se os algoritmos criados, correspondentes aos três métodos, às séries temporais provenientes do ensaio de vibração ambiental, sendo esta a aplicação fundamental deste trabalho e sobre a qual se procuraram analisar de forma mais completa possível os resultados obtidos.

O primeiro método aplicado (PP), demonstrou-se bastante competente na identificação das frequências naturais e configurações modais, tendo no entanto sido necessário efetuar um tratamento prévio dos dados, com base no comportamento dinâmico da estrutura, separando as séries analisadas conforme se referiam a acelerações longitudinais, transversais ou verticais (este passo foi absolutamente fundamental devido à incapacidade do método identificar modos com frequências próximas). Vencida esta dificuldade, o método da seleção de picos permitiu uma análise que se considerou bastante satisfatória, não tendo no entanto sido possível esboçar qualquer tipo de estimativa relativa ao amortecimento modal.

O segundo método utilizado, aplicado apenas na sua versão melhorada (EFDD), permitiu desde logo ultrapassar as duas maiores debilidades encontradas no método anterior: incapacidade de identificar modos próximos e impossibilidade de estimar o amortecimento modal. No entanto, e enquanto o primeiro problema foi resolvido de forma convincente (apesar de se ter optado por uma análise separada para melhor confrontar os resultados), o mesmo não se pode afirmar do último. De facto, e analisando as funções de auto-correlação obtidas a partir dos vários “setups” constatou-se que em determinados casos a exponencial negativa que se esperava que a envolvesse se encontrava francamente mal definida, mesmo alargando as áreas do espectro seleccionadas, prejudicando assim as estimativas modais. Os resultados obtidos para frequências naturais e configurações modais foram globalmente bastante próximas das identificadas anteriormente.

O último método aplicado (SSI-COV), e mais uma vez analisando as séries temporais de forma independente em função do tipo de movimento identificado apesar de se ter demonstrado ser possível um tratamento conjunto, permitiu, quando se analisou todos os “setups” em simultâneo, obter estimativas para o amortecimento que se apresentavam bastante consistentes. No entanto, e tendo estes resultados tido desvios mais ou menos importantes em relação aos obtidos pelo EFDD e, sobretudo, quando se comparava modos correspondentes dos dois tabuleiros, julgou-se adequado analisar a variação deste parâmetro ao longo do ensaio. Esta nova análise revelou que estimativas que se julgavam consistentes tinham afinal variações significativas durante os vários “setups”, algumas das quais eventualmente explicadas por intensidades distintas ao nível da excitação atuante, tendo ficado a dúvida sobre qual a análise que melhor traduzia a realidade modal da estrutura.

No que diz respeito às estimativas obtidas pelos três métodos (frequências e modos de vibração), estas foram bastante consistentes ao longo de todo o processo, salientando-se, no entanto, a importância do confronto dos vários métodos, tanto para conferir robustez e confiança aos resultados, como para tirar partido das vantagens e ultrapassar as dificuldades de cada aplicação.

Os vários resultados obtidos pelo processo de identificação foram então confrontados com os resultados do modelo numérico tendo-se focado todo o processo apenas no tabuleiro de jusante e procurado identificar eventuais causas para os desvios inevitavelmente encontrados. Numa primeira fase, e tirando partido do movimento transversal relativo entre tabuleiro e pilares se encontrar à partida impedido, procurou-se quantificar da maneira mais adequada possível a rigidez ao nível da fundação dos pilares utilizando para isso uma rotina interativa entre folhas de cálculo e MATLAB que permitiu prever com algum rigor os resultados das várias combinações possíveis. De seguida, e assumido o comportamento isotrópico do terreno, concluiu-se o ajuste do modelo numérico manipulando a resistência oferecida pelos vários aparelhos de apoio ao movimento, de maneira a conseguir também boas aproximações para os modos verticais. Após a conclusão do processo, tentou-se aplicar os resultados obtidos para o tabuleiro de montante para perceber se estes eram capazes de identificar as diferenças obtidas experimentalmente entre os dois cenários, tendo o erro médio entre valores numéricos e experimentais aumentado ligeiramente, como também era esperado, apesar de não se ter obtido resultados completamente desfasados da realidade. Daqui importa ressaltar que o modelo final poderá não representar fielmente a realidade, mas



ainda assim permite uma análise adequada em casos em que o fundamental seja uma correta definição das caraterísticas modais da estrutura (frequências naturais e modos próprios).

## 6.2. DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Durante todo o processo de identificação realizado constatou-se a capacidade dos vários métodos utilizados para identificar de forma correta e bastante consistente as frequências e modos de vibração próprios da estrutura, estando às estimativas do amortecimento associado um processo muito mais complexo. De facto, e sendo esta grandeza de grande importância quando se pretende avaliar fenómenos de ressonância ou instabilidade aerodinâmica, é necessário aperfeiçoar os métodos de maneira a melhorar estas estimativas. Por exemplo, poderá ser interessante, como já foi perceptível ao longo deste trabalho e nomeadamente no método SSI-COV, confrontar os resultados entre tratamento conjunto ou “setup” a “setup”, procurando perceber qual a análise que melhor aproxima a realidade. Nesse sentido, avançam-se desde já duas hipóteses passíveis de serem detalhadas em trabalhos futuros:

- Utilizando dados gerados artificialmente, e portanto para os quais são conhecidos os parâmetros modais, testar as duas hipóteses para vários “setups”, eventualmente gerados com intensidades de excitação distintas e para diferentes durações;
- Recorrendo às séries temporais de um sensor monitorizado em todos os “setups” (sensor de referência), confrontar os resultados obtidos por dois processos distintos:
  - Calcular os parâmetros modais a partir de cada uma das funções de auto-correlação (tantas quanto o número de “setups” realizado);
  - Calcular um único parâmetro a partir de uma função de auto-correlação obtida através da média das várias funções auto-correlação do ponto anterior (note-se que este procedimento é distinto do processamento conjunto, que, ao justapor os vários “setups”, alarga artificialmente a duração das séries temporais);

Abordando agora o ajuste de modelos numéricos a dados experimentais, seria de grande interesse tornar o processo o mais automático possível, quer ao nível da identificação modal, quer ao nível do processo de ajuste propriamente dito. De facto, o primeiro aspeto permitiria aplicar os vários métodos de forma muito mais eficiente por não ser necessário qualquer tipo de intervenção por parte do utilizador, enquanto o segundo tornaria possível um processo de ajuste também ele muito mais eficiente e preciso. Evidentemente este último aspeto implicaria uma interação entre programas de cálculo de elementos finitos e as rotinas criadas em MATLAB (ou outras), o que obrigaria a um grau de aprofundamento destas questões que não se procurou neste trabalho (uma breve descrição destes processos de ajuste automáticos pode ser encontrada na referência (Magalhães, 2004)).



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Allemang, Randall J - The modal assurance criterion—twenty years of use and abuse. *Sound and vibration*. Vol. 37. n.º 8 (2003).
- Bendat, Julius S.; Piersol, Allan G. - Random Data analysis and measurement procedures. New York: John Wiley & Sons, 2000.
- Bracewell, Ronald N. - The Fourier Transform and Its Applications. 3<sup>rd</sup> Edition. McGraw-Hill International Editions, 2000.
- Brincker, Rune; Ventura, C; Andersen, Palle - Damping estimation by frequency domain decomposition. *IMAC XIX, Kissimmee, USA*. (2001).
- Brincker, Rune; Zhang, Lingmi; Andersen, Palle - Modal Identification from Ambient Responses using Frequency Domain Decomposition. San Antonio, USA: 2000.
- Caetano, Elsa de Sá - Identificação experimental de parâmetros dinâmicos em sistemas estruturais. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 1992
- Chopra, A.K. - Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering. Prentice Hall/Pearson Education, 2011.
- Clough, R.W.; Penzien, J. - Dynamics of structures. McGraw-Hill, 1975.
- Cooley, James W; Tukey, John W - An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. comput.* Vol. 19. n.º 90 (1965).
- Cunha, Álvaro Alberto de Matos Ferreira da - Dinâmica estrutural estocástica aplicações à engenharia sísmica. Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 1990
- Felber, Andreas Johann - Development of a Hybrid Bridge Evaluation System. PhD Thesis, University of British Columbia, Vancouver, Canada, 1993
- Hong, Merit Yi - A frequency-domain least-squares approach to sinusoidal signal analysis, Arizona State University
- Juang, Jer-Nan - Applied System Identification. Englewood Cliffs, New Jersey: 1994.
- Klema, Virginia; Laub, Alan J - The singular value decomposition: Its computation and some applications. *Automatic Control, IEEE Transactions on*. Vol. 25. n.º 2 (1980).
- Magalhães, F.; Cunha, A.; Caetano, E.; Brincker, R. - Damping estimation using free decays and ambient vibration tests. *Mechanical Systems and Signal Processing*. Vol. 24. n.º 5 (2010). p. 1274-1290.
- Magalhães, Filipe; Cunha, Álvaro - Explaining operational modal analysis with data from an arch bridge. *Mechanical Systems and Signal Processing*. Vol. 25. n.º 5 (2011). p. 1431-1450.
- Magalhães, Filipe Manuel Rodrigues Leite de - Identificação modal estocástica para validação experimental de modelos numéricos. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2004

Magalhães, Filipe Manuel Rodrigues Leite de - Operational modal analysis for testing and monitoring of bridges and special structures. Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2010

Maia, N.M.M.; Silva, J.M.M. - Theoretical and experimental modal analysis. Baldock: Research Studies Press, 1997.

MatLab - Signal Processing Toolbox. The MathWorks, 1998.

Overschee, Peter Van; Moor, Bart de - Subspace Identification for Linear Systems. *Kluwe Academic Publishers*. (1996).

Parloo, Eli - Application of Frequency-Domain System Identification Techniques in the Field of Operational Modal Analysis. PhD Thesis, Vrije Universiteit, Brussels, Belgium, 2003

Peeters, Bart - System Identification and Damage Detection in Civil Engineering. PhD Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium, 2000

Peeters, Bart; De Roeck, Guido - Reference based stochastic subspace identification in civil engineering. *Inverse Problems in Engineering*. Vol. 8. n.º 1 (2000). p. 47-74. 1068-2767

Peeters, Bart; De Roeck, Guido - Stochastic System Identification for Operational Modal Analysis: A Review. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. Vol. 123. n.º 4 (2001). p. 659-667.

Pridham, Brad A. - State space modeling and identification of stochastic linear structural systems. NR04272, McMaster University (Canada)

Reynders, Edwin - System Identification and Modal Analysis in Structural Mechanics. PhD Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium, 2009

Reynders, Edwin - System Identification Methods for (Operational) Modal Analysis: Review and Comparison. *Archives of Computational Methods in Engineering*. Vol. 19. n.º 1 (2012). p. 51-124. 1134-3060

Rodrigues, Jorge - Identificação modal estocástica Métodos de análise e aplicações em estruturas de engenharia civil. Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2004

Vagner,; Morais; Vieira, Cláudio; - MatLab Curso Completo. FCA, 2013.



